Q
46
S6784
NH

S. I. LIBRARY

SMITHSONIAN
LIBRARY

506.49
.S675
701
n.m.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS.

Séance du 4 janvier 1868.

PRÉSIDENCE DE M. PUEL.

M. Laguerre fait une communication sur la construction du cercle osculateur des anallagmatiques sphériques.

M. Marey rend compte des expériences qu'il a entreprises sur l'état électrique des muscles dans la contraction musculaire.

M. Alix expose le résultat de ses recherches sur quelques points de l'anatomie de l'Orang-Outang. Il a vérifié chez cet animal l'absence du ligament rond de la tête du fémur.

Sont élus : M. Mannheim, président pour le premier semestre de 1868 ; M. Laboulaye, trésorier ; M. Alix, archiviste ; MM. Transon, Laurent, Moutard, membres de la commission des comptes.

M. de Caligny a communiqué dans cette séance quelques détails sur ce qu'il a dit dans la séance précédente relativement aux roues verticales à aubes courbes et à une nouvelle turbine à double couronne mobile.

Quant aux roues verticales à aubes courbes où l'eau entre par-dessous, il est à peine nécessaire d'ajouter que, si l'eau est transvasée latéralement au moyen de lames courbes con-

centriques, pour sortir par d'autres aubes courbes, comme cela a été expliqué le 28 décembre, il est bon que cela se fasse de chaque côté de la roue; de sorte que, de chaque coté de cette roue, il y aurait une couronne renfermant des aubes courbes, chacune de ces couronnes ayant une largeur à peu près égale à la moitié de celle de la couronne centrale, par les aubes de laquelle l'eau entrerait pour sortir par ces deux couronnes latérales. Il est entendu que cela ne peut être essayé que pour des roues d'une assez petite largeur.

Quant à la turbine à double couronne mobile, pour se rendre compte de la manière de transvaser l'eau ascendante de la couronne intérieure dans la couronne extérieure, dans les circonstances où l'on voit *à priori* que cela peut se faire sans employer des lames courbes concentriques, ayant un but analogue à celui qui vient d'être rappelé, il est intéressant de considérer l'hypothèse suivante. On trouve par le calcul que, dans des circonstances qui précisément se présenteront dans la pratique, la hauteur de chute et le diamètre de la turbine peuvent être combinés de manière que la force centrifuge de l'eau diffère assez peu en moyenne de la pesanteur pour qu'on voie très-facilement comment les choses se passeront en général.

Dans l'hypothèse dont il s'agit, on voit immédiatement que les choses peuvent être disposées de manière que l'ascension de l'eau, en vertu de la vitesse acquise restante, quand chaque molécule arrivera dans la première couronne à la hauteur où l'on veut qu'elle tende à se transvaser, sera plus que suffisante pour que la force centrifuge ait le temps de faire passer toute l'eau de la couronne intérieure dans la couronne extérieure.

Quant à la perte de force vive résultant des vitesses latérales occasionnées par la force centrifuge, il est facile de voir que, si la largeur des couronnes est petite par rapport à la hauteur de chute motrice, cette perte ne sera qu'une petite fraction de cette chute dans l'hypothèse dont il s'agit.

M. de Caligny répète qu'avant d'avoir fait des expériences sur les roues à aubes courbes, c'est au point de vue des théories générales qu'il a cru pouvoir faire des communications sur ce sujet.

16
6784
5-6
1868-
1869
CNHRB

Séance du 11 janvier 1868.

PRÉSIDENCE DE M. DE SAINT-VENANT.

M. Laboulaye entretient la Société de la construction des nouvelles machines à ammoniaque.

M. Gilbert adresse une note intitulée : *De la courbure des surfaces.*

Sur la courbure des surfaces, par M. Gilbert.

La note communiquée à la Société par M. l'abbé Aoust, dans sa séance du 21 décembre 1867 (journal *l'Institut*, n° 1774, p. 3), me détermine à présenter, de mon côté, quelques observations.

Comme je l'ai dit ailleurs, j'étais parvenu aux résultats dont un extrait a été présenté à la Société dans la séance du 25 octobre (voir *l'Institut*, n° 1771, p. 399) (1), avant de rien connaître des travaux de M. l'abbé Aoust sur les coordonnées curvilignes. En les examinant depuis lors, j'ai constaté qu'en effet je m'étais rencontré avec lui sur plusieurs points, et dans mon mémoire, dont la rédaction est terminée depuis deux mois et que j'ai présenté à l'Académie royale de Belgique, je me suis fait un devoir d'appeler dans une note l'attention sur les rapports qui pouvaient exister entre ses recherches et les miennes. Ainsi, je reconnais sans détour que cet habile géomètre a, longtemps avant moi, appliqué avec avantage à la théorie des lignes tracées sur une surface la notion à laquelle il donne le nom de *courbure*

---

(1) Cette note, envoyée au mois d'août, est arrivée trop tard pour être présentée avant les vacances.

inclinée et que j'appelle *déviation*; que dans les parties de ses travaux que j'ai retrouvées par d'autres voies, l'antériorité lui appartient, et qu'en particulier la formule

$$(\alpha) \qquad \frac{\cos(\delta_1, P_1)}{\delta_1} = \frac{1}{g_2} - \frac{d\,\theta}{ds_2},$$

(*l'Institut*, loc. cit.) à laquelle je suis parvenu par une voie géométrique bien simple, comme je l'indique dans mon mémoire, ne diffère que par la notation de la formule (14) de la *Théorie des coord. curvil. quelconques* (p. 11). Je regarde cette formule comme l'une des plus précieuses dans la théorie des surfaces, et j'en ai fait un fréquent usage.

Pour le reste, tant par l'objet que par les procédés de démonstration, mon travail s'écarte beaucoup des travaux de M. l'abbé Aoust, et il convient que j'entre à cet égard dans quelques détails.

I. La première remarque du savant géomètre porte sur la formule (D) de l'extrait rappelé ci-dessus (voir *l'Institut*, n° 1771, p. 399), qui, dit-il, ne diffère pas de celles que MM. Liouville et Bonnet ont donnée en 1851.

Assurément, considérée comme une conséquence du théorème de Gauss, ou mieux encore du théorème de M. Bonnet sur la courbure totale d'un polygone curviligne, cette formule n'a rien de neuf, et elle s'en tire si simplement qu'on peut dire qu'elle n'appartient à personne : cette observation s'applique également à la formule (17)' de M. Aoust, dans le *Journal de Crelle* (tome LVIII, p. 361), qui n'en est qu'un cas particulier.

Mais ce qui offre précisément quelque intérêt et une certaine difficulté, c'est au contraire d'arriver *directement*, par des considérations géométriques très-simples, à cette expression remarquable de la mesure de courbure, qui a la généralité de celle de Gauss avec la complication en moins et la clarté géométrique en plus, et qui fournit ensuite, par une méthode aussi simple que curieuse, comme on le verra dans mon mémoire, soit le théorème de Gauss sur le triangle géodésique, soit le théorème de M. Bonnet sur le triangle quelconque. C'est là ce qui n'a été fait jusqu'ici par personne, à ma connaissance, et les réflexions très-fines que fait

M. Bertrand à ce sujet (*Traité de Calcul différentiel*, p. 747, 748), le montrent suffisamment; c'est là ce que je n'ai vu nulle part dans les écrits de M. Aoust, non plus que deux relations que je crois nécessaires pour cet objet : l'une est mon équation (C), l'autre est la relation suivante, fort utile dans toute cette théorie :

$$\frac{\sin(\delta_1, P_1)}{\delta_1} = \frac{\sin \varphi_2}{r_2},$$

dans laquelle φ_2 désigne l'angle compris entre la tangente MT et la tangente conjuguée de MT_2, et les autres notations sont les mêmes que dans la note du 25 octobre.

Or, c'est là ce que j'ai réussi à faire avec une simplicité inespérée, ce que je regarde comme vraiment neuf dans mon travail et comme une heureuse application de l'ingénieuse théorie de la courbure inclinée (1). J'établis, en effet, directement dans mon mémoire, par quelques considérations géométriques fort simples, l'équation :

$$\frac{\sin \xi \, ds_1 \, ds_2}{r_1 \, r_2} = d_2 \left[\frac{\cos(\rho_1, P_1)}{\rho_1} ds_1\right] - d_1 \left[\frac{\cos(\delta_1, P_1)}{\delta_1} ds_2\right],$$

qui se transforme immédiatement, par les équations (C), (α) et par la formule de la courbure géodésique, dans l'équation (D). Je note en passant que la formule (6) de M. l'abbé Aoust ne diffère pas de la précédente, mais il la déduit de la relation (D) qu'elle me sert au contraire à établir.

II. La seconde remarque de M. l'abbé Aoust est relative à la quantité

$$\frac{\cos(\rho_1, \rho_2)}{\rho_1 \, \rho_2} - \frac{\cos(\delta_1 \, \delta_2)}{\delta_1 \, \delta_2}$$

dont il s'occupe après moi et dont il donne l'expression

---

(1) Ce que je dis dans ma note rappelée ci-dessus ne peut laisser aucun doute à cet égard.

lorsque les courbes coordonnées sont quelconques. Il est à peine nécessaire de faire remarquer qu'en énonçant le théorème : « Lorsque deux systèmes de courbes *quelconques* se coupent sur une surface, l'expression ci-dessus ne varie pas lorsqu'on déforme la surface, » j'ai indiqué suffisamment que j'avais obtenu la valeur de cette grandeur en fonction des angles et des arcs tracés sur la surface, dans le cas général. La formule (1)' de M. l'abbé Aoust est en effet dans mon mémoire : si je ne l'ai pas écrite dans l'extrait présenté à la Société, c'est que son principal intérêt réside dans le théorème énoncé, et je n'ai cité les deux cas particuliers qui s'en déduisent que comme donnant lieu à un énoncé assez net et assez élégant.

Mais je dois faire ici la même remarque que ci-dessus : considérée comme une transformation des formules sur la mesure de courbure, ainsi que le fait M. Aoust, cette formule (1)' ne m'offrait qu'un intérêt secondaire. Ce qui lui donnait à mes yeux une valeur réelle, c'est que, en ayant obtenu une démonstration directe, aussi simple que possible, j'en déduisais immédiatement le théorème de Gauss sur l'invariabilité du produit R' R'', ainsi que je l'ai dit dans ma précédente note, et de plus, comme je l'ai montré dans mon mémoire, une méthode nouvelle, très-simple et indépendante, pour arriver au théorème général de M. Bonnet sur la courbure totale.

En effet, j'obtiens directement, par une simple différentiation, la relation générale :

$$\left[\frac{\cos(\rho_1, \rho_2)}{\rho_1 \ \rho_2} - \frac{\cos(\delta_1, \delta_2)}{\delta_1 \ \delta_2}\right] ds_1 \, ds_2 = d_2 \left[\frac{\cos(\rho_1, T_2)}{\rho_1} \, ds_1\right] - d_1 \left[\frac{\cos(\delta_1, T_2)}{\delta_1} \, ds_2\right]$$

qui équivaut aux formules (6)' de M. l'abbé Aoust, et qui, par l'équation (α) et l'expression de la courbure géodésique, devient ma formule générale identique à la formule (1)' du savant géomètre. En décomposant ensuite une portion de surface en éléments infiniment petits par des lignes de courbure et appliquant l'équation à ces éléments, j'en tire le théorème de M. Bonnet sur la courbure totale.

III. Je dois remarquer enfin que l'application de l'idée de la déviation m'a conduit encore, par une voie toujours très-simple, à beaucoup d'autres formules relatives à la courbure des lignes et des surfaces. Je signalerai, en passant, cette transformation de l'équation (D) :

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\theta\left[\dfrac{d\left(\dfrac{1}{g_1}\right)}{ds_2}-\dfrac{d\left(\dfrac{1}{g_2}\right)}{ds_1}\right]=\dfrac{\sin^2\theta}{R'\,R''}+\dfrac{1}{g_1^2}+\dfrac{1}{g_2^2}-\dfrac{2\cos\theta}{g_1\,g_2} \\ +\left(\dfrac{1}{g_1}-\dfrac{\cos\theta}{g_2}\right)\dfrac{d\,\theta}{ds_1}+\left(\dfrac{\cos\theta}{g_1}-\dfrac{1}{g_2}\right)\dfrac{d\,\theta}{ds_2}-\sin^2\theta\,\dfrac{d^2\,\theta}{ds_1\,ds_2} \end{array}\right.$$

d'où l'on déduit des résultats intéressants.

Si l'on désigne par φ_1, φ_2 les angles que fait la tangente MT_1 avec les conjuguées respectives de MT_1, MT_2, et par ς l'angle $\varphi_1-\varphi_2$, on a encore :

$$d_2\left(\frac{ds_1}{r_1}\right)-\cos\xi\,d_1\left(\frac{ds_2}{r_2}\right)=-\frac{\sin\xi\,ds_1\,ds_2}{r_2}\left(\frac{1}{g_1}+\frac{d\,\varphi_2}{ds_1}\right)$$

$$d_1\left(\frac{ds_2}{r_2}\right)-\cos\xi\,d_2\left(\frac{ds_1}{r_1}\right)=\frac{\sin\xi\,ds_1\,ds_2}{r_1}\left(\frac{1}{g_2}+\frac{d\,\varphi_1}{ds_2}-\frac{d\,\theta}{ds_2}\right),$$

d'où l'on déduit les variations de l'angle de deux normales infiniment voisines suivant des lignes coordonnées quelconques.

D'autres formules générales, que je ne développe pas ici, se réduisent, lorsque les courbes c_1 et c_2 se coupent orthogonalement, aux suivantes, dans lesquelles R_1 et R_2 sont les rayons de courbure des sections normales tangentes aux lignes c_1 et c_2, et γ_1, γ_2, les rayons de seconde courbure géodésique de ces lignes :

$$\frac{d}{ds_2}\left(\frac{1}{R_1}\right)+\frac{d}{ds_1}\left(\frac{1}{\gamma_2}\right)=\frac{1}{g_1}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{g_2}\left(\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_2}\right)$$

$$\frac{d}{ds_2}\left(\frac{1}{\gamma_1}\right)-\frac{d}{ds_1}\left(\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{g_1}\left(\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_2}\right)-\frac{1}{g_2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

On peut les simplifier à l'aide de la relation connue $\gamma_1 = -\gamma_2$; et lorsque l'on prend pour lignes coordonnées les lignes de courbure, on retrouve des formules données par M. Picart dans sa thèse sur les surfaces (p. 27). On en déduit encore d'autres résultats intéressants, par exemple en prenant des lignes géodésiques et leurs trajectoires orthogonales, etc.

Enfin, on connaît la condition très-simple que M. Bonnet a donnée pour que deux séries de lignes décomposent une surface en carrés : j'ai obtenu, plus simplement encore, une formule générale qui se réduit, lorsque l'angle θ est constant, à celle-ci :

$$\frac{d}{ds_1}\left(\frac{1}{g_1}\right) + \frac{d}{ds_2}\left(\frac{1}{g_2}\right) - \cos\theta\left[\frac{d}{ds_2}\left(\frac{1}{g_1}\right) + \frac{d}{ds_1}\left(\frac{1}{g_2}\right)\right] = 0\,,$$

qui exprime la condition pour que la surface soit décomposée en losanges.

Mais je répète en finissant que, indépendamment des formules nouvelles auxquelles je puis être parvenu, mes recherches ont eu surtout pour but, et, j'espère, pour résultat, de reconstruire par une méthode nouvelle et géométrique à la fois plus générale et beaucoup plus simple, tout ce que Gauss et les géomètres qui l'ont suivi nous ont appris de plus intéressant sur cette belle théorie des lignes décrites sur une surface. Pour cela, j'ai tiré un grand parti de l'élément nouveau que M. Aoust avait appelé *courbure inclinée*, et j'espère qu'il reconnaîtra que, sous ce rapport, j'ai été utile aux idées qu'il a introduites dans la géométrie.

Pour ce qui est de la préférence à accorder à telle dénomination sur telle autre, à telle démonstration sur telle autre sous le rapport de la clarté, c'est une question sur laquelle il convient d'attendre la décision des géomètres.

Séance du 18 janvier 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. de Saint-Venant complète une communication antérieure, en date du 16 juillet 1864, sur le problème des remous (1).

M. Laguerre fait part de nouveaux travaux sur les surfaces anallagmatiques.

Rapport de M. Bureau sur les titres des candidats à une place de membre titulaire vacante dans la troisième section.

Problème des remous, ou des gonflements produits jusqu'à de grandes distances dans les cours d'eau par les barrages qu'on y élève, par M. de Saint-Venant.

M. de Saint-Venant a fait à la Société une communication

---

(1) Un malentendu a été cause que cette note n'a pas été imprimée à l'époque de sa lecture à la Société philomathique. Mais M. de Saint-Venant a donné, au volume de 1865, des *Mémoires de la Société des sciences de Lille* (*Notice sur la vie et les ouvrages de l'hydraulicien du Buat*), au bas des pages 640 et 648, la formule représentative ci-après $RI = \gamma U^m R^{-n}$, avec $m = 1,9$, $n = 0,3$, en annonçant qu'il venait de s'en servir pour calculer de nouvelles *tables de remous*. Il se croit ainsi, de toute manière, fondé à réclamer la priorité sur M. Ph. Gauchler, qui a envoyé à l'Académie des sciences, le 22 avril 1867, un Mémoire où il construit, pour représenter par exemple les expériences faites sur les canaux à ciel ouvert (Comptes rendus, t. LXIV, p. 821), des formules revenant à celle-ci, avec $n = \frac{1}{3}$ qui ne diffère pas sensiblement de 0,3; et avec $m = 2$ ordinairement et $= 1$ dans un cas extrême, valeurs entre lesquelles celle $= 1,9$ est comprise.

établissant la possibilité de construire, avec les données fournies par les recherches récentes sur les eaux courantes, des tables numériques et des formules graphiques nouvelles comme celles qu'il a calculées en 1851 pour résoudre expéditivement cet important problème au moyen des données expérimentales dont on disposait alors.

Les belles expériences de M. l'ingénieur des ponts et chaussées Bazin sur les canaux découverts (*Savants étrangers*, t. XVIII) ont montré, dit-il, comme celles de feu l'inspecteur général Darcy sur les tuyaux (*idem*, t. XV), que le produit RI de la pente I d'un courant uniforme par le *rayon moyen* $R = \frac{\omega}{\chi}$ de la section d'eau (quotient de l'aire ω par le contour ou *périmètre mouillé* χ) non-seulement varie beaucoup, pour même vitesse, avec le degré de poli ou de rugosité des parois, ce que n'avait pas aperçu du Buat, mais varie aussi très-sensiblement avec le rayon R lui-même, en sorte que pour chaque nature de paroi ce produit est fonction à la fois de la *vitesse moyenne* U et de R, et non pas de U seul.

Il faut donc poser, non plus $RI = aU + bU^2$ avec Prony et Eytelwein qui faisaient a et b constants, mais, avec M. Darcy

$$RI = \left(\alpha' + \frac{\beta'}{R^2}\right) U + \left(\alpha'' + \frac{\beta''}{R}\right) U^2$$

pour les tuyaux. Darcy réduisait cette équation, pour les cas et les besoins ordinaires, à $RI = \left(\alpha + \frac{\beta}{R}\right) U^2$; et c'est ce que fait aussi M. Bazin pour les canaux découverts, tout en reconnaissant *que dans ceux d'une très-petite section*, RI *est sensiblement proportionnel* à U et non à U^2, et en observant aussi que les coefficients α et β varient quelquefois légèrement avec la pente I pour même débit et pour même nature de paroi.

On sait que M. l'inspecteur général Dupuit a proposé d'employer de préférence (*Études sur le mouvement des eaux*, 2e édition, 1861) une formule $RI = \frac{bU^2}{(1 + aR)^2}$ qui

fait toujours décroître la résistance de l'unité superficielle des parois, pour même *vitesse moyenne*, quand les dimensions de la section augmentent.

Pour les canaux en terre, les seuls qui intéressent notre problème, M. Bazin trouve $\alpha = 0{,}00028$, $\beta = 0{,}00035$, ou pose

$$RI = 0{,}00028 \left(1 + \frac{1{,}25}{R}\right) U^2$$

équation dont chacun des deux membres représente la résistance moyenne de la paroi, évaluée en hauteur du prisme d'eau qui a sa surface pour base, et un poids égal à l'intensité de cette résistance.

Or, lorsque l'on passe du mouvement uniforme à un mouvement retardé, comme celui que détermine un barrage jusqu'à une grande distance à l'amont du point où il a été élevé, si l'on tient compte de l'*inertie* de l'eau affluente, en regardant, du reste, la résistance des parois comme une même fonction de la vitesse et du rayon moyen que quand le régime est uniforme, on peut poser, avec M. Belanger, φ désignant cette fonction, u la nouvelle vitesse au point quelconque du courant dont s est l'abscisse ou la distance à un point fixe situé en amont, g la pesanteur, y le relèvement de l'eau au-dessus de sa surface primitive supposée en pente uniforme i, d'où $i - \frac{dy}{ds}$ pour la nouvelle pente, enfin η un coefficient numérique (variant ordinairement entre 1 et 1,2) par lequel il faut multiplier la force vive due à la vitesse moyenne u d'une tranche transversale pour avoir sa force vive réelle, l'équation

$$(1) \qquad i - \frac{dy}{ds} = \frac{\eta}{2g} \frac{d\,(u^2)}{ds} + \frac{\chi}{\omega} \varphi \left(u, \frac{\omega}{\chi}\right);$$

d'où, U, H, Ω, X étant l'ancienne vitesse, l'ancienne profondeur, l'ancienne section et l'ancien périmètre mouillé, supposés constants ou indépendants de s ; ce qui, vu la cons-

tance du débit ou vu $\omega u = \Omega U$ donne $\frac{du}{ds} = -\frac{\Omega U}{\omega^2}\frac{d\omega}{ds}\frac{dy}{ds}$ et aussi vu $i = \frac{X}{\Omega}\varphi\left(U, \frac{\Omega}{X}\right)$:

$$(2) \qquad \frac{ids}{H} = \frac{1 - \eta \frac{U^2}{gH}\frac{\Omega^2}{\omega^3}\frac{H\,d\omega}{dy}}{1 - \frac{\frac{\chi}{\omega}\varphi\left(\frac{\Omega U}{\omega}, \frac{\omega}{\chi}\right)}{\frac{X}{\Omega}\varphi\left(U, \frac{\Omega}{X}\right)}}\, d\left(\frac{y}{H}\right)$$

L'intégration de cette équation, toujours effectuable numériquement par les formules connues de quadrature quelle que soit la forme de φ, quand le lit est d'une forme connue en sorte qu'on ait ω et χ partout en fonction de la profondeur nouvelle $y + H$, fournira les abscisses s répondant aux divers relèvements y, et, par suite, réciproquement les relèvements aux diverses distances en amont du barrage; *ce qu'on se proposait de déterminer.*

Un pareil calcul serait extrêmement long et nullement usuel. Il convient donc, pour les besoins de la pratique, de dresser d'avance des tables numériques que l'on n'ait qu'à consulter dans chaque cas, au lieu de continuer à se servir de certaines règles prétendues empiriques tout à fait irrationnelles et erronées.

Or, d'après la forme de l'équation (2), il faudrait autant de tables qu'il y aurait, non-seulement de lits de diverses formes, mais encore de grandeurs diverses de la vitesse U et du rayon moyen $\frac{\Omega}{X}$ dans l'état primitif.

Heureusement M. Dupuit a aperçu que sous certaines conditions l'on pouvait les réduire à une table unique de valeurs correspondantes de $\frac{is}{H}, \frac{y}{H}$, applicable pour toutes les pentes i comme toutes les profondeurs H. Ces conditions sont 1° que l'inertie soit négligeable ou que le deuxième terme du numérateur du second membre de (2) puisse être

effacé devant 1 ; 2° que, dans l'expression binôme $aU+bU^2$ assignée par Prony à la fonction φ, l'on puisse supprimer le terme aU en ne laissant que bU^2 ; 3° que le lit soit rectangle ; 4° et qu'il ait une largeur assez grande par rapport à sa profondeur pour qu'on puisse prendre sensiblement $\chi = X =$ cette largeur, et le rapport $\frac{\Omega}{\omega} = \frac{H}{H+y}$; car alors, ce qui affecte $d\left(\frac{y}{H}\right)$ dans le second membre est une simple fonction du rapport $\frac{y}{H}$. Et M. Dupuit a calculé cette table en obtenant l'intégrale en série.

J'ai remarqué, en 1851, qu'un semblable genre de solution était encore possible *sans ces quatre conditions* ou *sans faire de pareilles restrictions :* 1° en se servant de la méthode de quadrature de Th. Simpson ; 2° en calculant, pour la table, une troisième colonne, dont les nombres sont destinés à être multipliés par la donnée $\frac{\eta U^2}{gH}$, afin de tenir compte, par déduction, de l'effet de l'inertie de l'eau, qui n'est pas toujours négligeable ; 3° en substituant à $aU + bU^2$ un terme unique γU^m qui, comme je l'ai montré, donne sensiblement la même chose, l'exposant m étant fait un peu plus petit que 2, par exemple $= \frac{21}{11} = 1{,}909$, afin de se conformer à la loi depuis longtemps signalée par du Buat, « d'une résistance croissant en moindre raison que le carré de la vitesse » ; et, 4° j'ai fait voir aussi qu'en calculant en tout sept tables, de deux pages chacune, on embrasserait avec la même facilité les cas de *lits peu larges*, même à section trapèze et non rectangle.

J'ai remarqué aussi que toutes ces tables pouvaient être remplacées graphiquement par une épure de plusieurs *courbes de remous*, tracées sur papier quadrillé les unes au-dessus des autres, et entre lesquelles tout le monde peut en intercaler visuellement d'autres, suivant les cas, de manière à obtenir toute l'approximation désirable pour la pratique.

Mon mémoire, inséré en 1851 aux *Annales des Mines,* a servi de base à l'enseignement spécial de ce Corps savant

pour les questions d'hydraulique pratique y relatives; et plusieurs ingénieurs de celui des ponts et chaussées m'ont dit aussi avoir fait usage, d'une manière avantageuse, surtout des épures dont je viens de parler.

Or, il convient aujourd'hui d'examiner si la même construction de tables peu étendues et cependant suffisantes est possible en prenant pour la résistance des parois, ou pour la fonction φ, les valeurs que les travaux de M. Bazin ont récemment révélées.

Cela ne saurait se faire si l'on conserve à la fonction φ la forme à coefficient binôme $\left(\alpha + \frac{6}{R}\right)U^2$; car le deuxième terme du dénominateur de l'expression (2) de $\frac{ids}{R}$ sera

$$\frac{\chi\Omega^3}{X\omega^3}\,\frac{\alpha + 6\,\frac{\chi}{\omega}}{\alpha + 6\,\frac{X}{\Omega}}$$

qu'il n'est pas possible de réduire à une fonction de $\frac{y}{H}$, même quand on peut se permettre, vu la grande largeur du lit, de prendre $\chi = X$, $\frac{\omega}{\chi} = y + H$, $\frac{\Omega}{X} = H$.

Mais le calcul des tables désirées est possible si $\left(\alpha + \frac{6}{R}\right)U^2$ est remplaçable par une expression monôme $\gamma U^2 R^{-n}$, n étant un exposant fractionnaire compris entre 0 et 1; car, en supposant même que pour une représentation plus exacte l'on soit conduit à adopter pour U, comme j'ai fait en 1851, un exposant aussi fractionnaire m un peu au-dessous de 2, c'est-à-dire à prendre

$$RI, \text{ ou } \varphi\,(U, R) = \gamma\, U^m R^{-n},$$

le second terme du dénominateur de l'expression (2) se réduit à

$$\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^{m+n+1}\left(\frac{\chi}{X}\right)^{n+1};$$

c'est-à-dire à une fonction de $\frac{y}{H}$; fonction qui, très-simple si la largeur est grande et permet de prendre $\frac{\chi}{X} = 1$, $\frac{\Omega}{\omega} = \frac{H}{y + H}$, *n'a dans les autres cas, rien de compliqué,* ni de très-dépendant du rapport variable de la profondeur à la largeur moyenne du lit primitif; ni, non plus, de la proportion non négligeable pour laquelle les parois latérales ou les talus peuvent entrer dans le périmètre mouillé de la section ; de sorte qu'il ne faudra pas plus de tables ou de courbes que je n'en ai calculé ou tracé en 1851.

Il s'agit donc de savoir si les nouvelles expériences peuvent être représentées par une formule monôme $RI = \gamma U^m R^{-n}$ suffisamment approchée pour notre objet spécial.

J'ai commencé par l'essayer sur les expériences de feu Darcy relatives aux tuyaux de conduite d'eau. J'ai trouvé, entre autres résultats, que celles qui ont été faites sur les tuyaux de fer étiré de $0^m,0122$, de $0^m,0266$ et de $0^m,03955$ de diamètre étaient assez bien représentées par $RI = 0,00003198\ U^{1,811}\ R^{-0,529}$; mais qu'en se bornant aux tuyaux de $0^m,0266$ et de $0^m,03955$ on représentait encore mieux les résultats par

$$RI = 0,00007809\ U^{1,841}\ R^{-0,344}$$

Passant aux expériences de M. Bazin sur les lits découverts, j'ai reconnu que celles qu'il a faites en très-grand nombre avec des canaux en planches dont les rayons moyens variaient de $0^m,05$ à $0^m,30$ étaient assez approximativement représentées par

$$RI = 0,0002064\ U^{1,8}\ R^{-0,18}$$

Pour les canaux de dimensions analogues, rendus artificiellement rugueux par des liteaux, l'exposant négatif $-n$ de R devrait être porté à $-\frac{1}{3}$.

Il doit être, aussi, augmenté pour les lits en terre, autant qu'on peut le conclure de séries d'expériences faites par divers auteurs, et dont M. Bazin, en les discutant judicieuse-

ment, remarque les irrégularités nombreuses. Pour ceux de petite dimension, tels que les rigoles dont le rayon moyen n'excède pas $0^m,50$, on devait faire $n = \frac{1}{2}$ au moins; mais, pour les grands cours d'eau, on ferait $n = \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$.

Cela est d'accord avec ce qu'indique la formule empirique de M. Bazin, car si l'on s'impose la double condition d'avoir la même valeur pour γR^{-n} que pour $0,00028 \left(1 + \frac{1,25}{R}\right)$, et aussi les mêmes grandeurs pour leurs dérivées par rapport à R, quand on donne à ce rayon une valeur déterminée, l'on trouve qu'il faut prendre l'exposant $n = \frac{1,25}{1,25 + R}$, nombre d'autant plus petit, comme on voit, que R est plus grand.

Or, en supposant même une erreur de plusieurs dixièmes dans le choix de la valeur à donner à l'exposant $-n$ de R, elle influera peu sur la grandeur de l'exposant $m + n + 1$ ou à peu près $3 + n$ dont est affecté, comme on a vu, le rapport $\frac{\Omega}{\omega}$ des sections avant et après le relèvement de l'eau, et par conséquent le rapport $\frac{1}{1 + \frac{y}{H}}$ qui lui est substitué sensiblement quand la largeur est beaucoup plus grande que la profondeur. C'est même vraisemblablement à cause de cela que M. Bazin a trouvé que la formule ordinaire du mouvement varié représente approximativement les remous de ses canaux artificiels en attribuant à $\frac{RI}{U^2}$ ou à $\alpha + \frac{6}{R}$ la même valeur que dans l'état primitif du courant, ce qui reviendrait à faire $n = 0$. Mais l'ensemble des faits dont cet ingénieur distingué a enrichi la science hydraulique, et dont il m'a obligeamment communiqué le détail avant leur publication, prouve que l'on obtiendra une approximation bien plus grande en donnant à cet exposant n une valeur entre 0 et 1, telle que 0,3 pour les grands cours d'eau.

On reconnaît aussi qu'il y a à gagner du côté de l'approximation (voir ci-dessus) en donnant à l'exposant m de la vitesse une valeur un peu inférieure à 2.

J'ai, en conséquence, calculé pour :

$$m = 1{,}9, \quad n = 0{,}3$$

de nouvelles tables de remous, et des formules d'interpolation toutes faites et applicables à des grandeurs quelconques des diverses données, dans des limites étendues. J'en indique ici le principe avant le moment de les publier, ainsi que les épures capables de les remplacer commodément dans les cas habituels. Les chiffres et les courbes types ne diffèrent pas beaucoup de ce que donne mon travail de 1851, répondant, comme on vient de le voir, à $m = 1{,}909$, $n = 0$.

Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques, par M. Laguerre.

1. M. Moutard a le premier étudié d'un façon complète les surfaces anallagmatiques, c'est-à-dire les surfaces du quatrième ordre qui ont pour ligne double *l'ombilicale* (1). Il a montré que ces surfaces pouvaient être définies géométriquement, comme l'enveloppe des sphères dont les centres parcourent une surface du second degré A et qui coupent orthogonalement une sphère fixe S. Cette sphère peut être désignée sous le nom de sphère directrice de la surface; son centre est évidemment un pôle principal de l'anallagmatique engendrée. Au point de vue géométrique, il est avantageux de modifier un peu la définition précédente et de la présenter ainsi : A la surface du second degré donnée A, on mène un plan tangent quelconque qui coupe la sphère directrice S

(1) Voir le *Bulletin de la Société philomathique*, tome IV. Séance du 6 avril 1867.

suivant un cercle; par ce cercle, on peut faire passer deux cônes *isotropes*, dont les sommets sont évidemment deux points réciproques par rapport à la sphère directrice. Ces deux points, lorsque le plan tangent prend toutes les positions possibles sur la surface A, engendrent la surface anallagmatique, enveloppe des sphères ayant leur centre sur la surface A et coupant orthogonalement la sphère directrice.

2. M. Moutard a montré que la surface ainsi définie pouvait être engendrée de cinq manières différentes au moyen de cinq surfaces du second ordre A, A_1, A_2, A_3 et A_4, et de cinq sphères directrices correspondant à ces surfaces; que, par suite, la surface anallagmatique possédait cinq pôles principaux de transformation.

Je me propose dans cette note d'exposer de quelle façon sont reliées entre elles les surfaces du second ordre qui peuvent servir à la génération d'une anallagmatique donnée et comment elles se rattachent géométriquement aux focales de cette anallagmatique.

Les focales d'une surface sont, comme on le sait, les lignes doubles de la développable *isotrope* qui lui est circonscrite. M. Chasles a le premier donné cette notion de *focale* dans son *Aperçu historique*, etc., et montré d'une façon précise, ce qui était le point délicat de la question, la notion qui dans l'espace correspondait à la notion du foyer dans le plan. Il a développé du reste depuis les idées qu'il avait alors émises, et je renverrai notamment sur ce sujet à une note *sur les surfaces du second ordre homofocales*, insérée aux comptes rendus de l'Académie des sciences (11 juin 1860), note à laquelle, du reste, j'aurai, dans ce qui suit, plusieurs fois occasion de me rapporter.

Une surface anallagmatique étant définie par une surface du second degré A et une sphère directrice S, appelons C l'anallagmatique sphérique qui résulte de leur intersection; la même surface peut être définie par quatre autres surfaces du second degré A_1, A_2, A_3, A_4, et quatre shpères directrices correspondantes S_1, S_2, S_3, S_4. Soient C_1, C_2, C_3, C_4, les intersections respectives de ces surfaces, on voit immédiatement que les anallagmatiques sphériques C_1, C_2, C_3, C_4 sont les focales de la surface anallagmatique donnée.

Ces cinq focales ne sont pas indépendantes entre elles. Car,

étant pris l'une d'elles, C, par exemple, si on lui circonscrit une surface développable *isotrope*, cette surface développable, outre la courbe primitive C, renfermera d'autres lignes doubles qui seront évidemment aussi des focales de la surface proposée.

Or, ces autres lignes doubles seront précisément les quatre anallagmatiques C_1, C_2, C_3 et C_4.

De là résulte immédiatement le théorème suivant, qui mérite peut-être, par sa simplicité, d'être explicitement énoncé. Soient une courbe M résultant de l'intersection de deux surfaces du second ordre P et Q, et une section plane quelconque R de la surface P, la surface développable circonscrite à la fois aux courbes M et R admet, comme lignes doubles, outre la courbe M, quatre autres courbes du quatrième ordre, et chacune de ces courbes est située sur une surface du second ordre passant par la conique R.

3. L'arête de rebroussement de la développable *isotrope* circonscrite à une surface du second degré jouit d'une propriété curieuse signalée par M. Moutard dans les *Nouvelles Annales*; elle consiste en ce que la projection de cette arête sur chacun des plans principaux de la surface est la développée de la focale contenue dans ce plan. Il existe une propriété analogue relativement aux surfaces anallagmatiques. Considérons une sphère directrice quelconque A et soient O son centre et E l'arête de rebroussement de la développable *isotrope* circonscrite, le cône ayant pour sommet le point O et pour base la courbe E coupera la sphère correspondante A suivant le lieu des centres de courbures sphériques de la focale située sur cette sphère.

4. Lorsqu'une surface, telle que la surface anallagmatique considérée, contient l'*ombilicale*, la développable isotrope qui lui est circonscrite se décompose en deux surfaces distinctes. L'une est l'enveloppe des plans, pour lesquels le point de contact avec la surface n'est pas sur l'*ombilicale* même; les lignes doubles de cette surface sont les *focales ordinaires*, et dans le cas actuel elles se composent des cinq anallagmatiques sphériques dont j'ai parlé ci-dessus.

L'autre est l'enveloppe des plans qui touchent la surface le long de l'ombilicale et ses lignes doubles sont les *focales singulières*. Dans le cas actuel, ces focales singulières se

composent de trois coniques qui sont les *focales ordinaires* communes aux cinq surfaces A, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, qui peuvent servir à la génération de l'anallagmatique.

Les focales singulières, tout en jouissant des propriétés générales des focales, s'en séparent cependant en certains points; ainsi, tandis que les focales ordinaires se transforment, par la méthode des rayons vecteurs réciproques, en focales ordinaires de la transformée, il n'en est pas de même des focales singulières. Les surfaces du système triple orthogonal, découvert par M. Moutard et formé de surfaces anallagmatiques, ont les mêmes focales ordinaires, mais leurs focales singulières varient pour chaque surface.

4. Considérons une surface anallagmatique définie, comme il a été dit au § 1 au moyen d'une surface du second degré A et d'une sphère directrice S.

La développable circonscrite à ces deux surfaces a quatre lignes doubles qui sont des coniques. Soient K_1, K_2, K_3 et K_4 ces quatre coniques. D'après un théorème dû à M. Chasles (*loc. cit.*), par chacune de ces coniques on peut faire passer une surface homofocale à A. *Les quatre surfaces du second degré ainsi déterminées seront précisément les surfaces A_1, A_2, A_3, A_4, au moyen desquelles, d'après le théorème de M. Moutard, on peut engendrer la surface.*

Etant prise une de ces surfaces, par exemple la surface A_1, qui passe par la conique K_1, il sera facile de déterminer la sphère directrice correspondante. En effet, que l'on mène le plan de la conique K_1, il coupera la surface A suivant une conique. Si l'on circonscrit à cette dernière conique et à la surface A_1 une surface développable, cette surface, d'après un théorème de M. Chasles (*loc. cit.*), sera circonscriptible à une sphère, et *cette sphère sera précisément la sphère directrice correspondant à la surface A.*

5. Divers théorèmes relatifs, soit aux surfaces du second ordre homofocales, soit aux surfaces anallagmatiques, découlent des considérations précédentes. Je me bornerai à énoncer les deux suivants :

Théorème I. — *Etant donnés deux surfaces homofocales du second ordre et un plan fixe H, par une droite D tracée dans ce plan, menons les plans tangents aux deux surfaces. En joignant les points de contact appartenant à des surfaces*

différentes, nous obtiendrons quatre droites. Toutes les droites ainsi obtenues, lorsque D se déplace dans le plan H, sont normales à une même surface anallagmatique.

Soient S, T les coniques suivant lesquelles le plan H coupe les deux surfaces homofocales données ; construisons une conique quelconque passant par les quatre points d'intersection de S et de T; si la droite D se meut tangentiellement à cette conique, les droites obtenues par la construction précédente formeront une surface développable, et par conséquent traceront sur l'anallagmatique une de ses lignes de courbure.

Théorème II.—*Etant données deux surfaces homofocales A et B et une droite D, menons par cette droite les plans tangents aux deux surfaces, et soient* b *et* b^1 *les points de contact relatifs à la surface B,* a *l'un des points de contact relatifs à la surface A; les droites* ab *et* ab^1 *sont dans un même plan avec la normale au point* a *et également inclinées sur cette normale.*

6. Les considérations que j'ai exposées dans cette note au sujet des surfaces anallagmatiques s'appliquent évidemment aux courbes planes anallagmatiques. Je me dispenserai donc d'énoncer les propositions relatives à ces courbes.

Séance du 25 janvier 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. Janssen fait une communication relative à l'éclipse de Soleil du 6 mars 1867, et aux résultats que lui a donnés dans cette occasion l'analyse spectrale.

Dans une deuxième communication, le même membre rend compte des phénomènes géologiques qu'il a constatés à Santorin, dans l'Archipel.

M. Wolf présente, de la part de M. Barbier, une note sur la condition de l'élimination de l'erreur de lecture d'un cercle gradué, provenant du jeu des tourillons dans les coussinets.

Sur la condition de l'élimination de l'erreur de lecture d'un cercle gradué provenant du jeu des tourillons dans les coussinets, par M. Wolf.

1. La lecture du point où un cercle gradué est rencontré par une normale fixe varie pour une petite translation du cercle d'une quantité qui est en général du même ordre.

Cette quantité est la projection de la petite translation, qu'on appelle excentricité, sur une perpendiculaire à la normale fixe. Dans un cercle gradué, mis successivement dans plusieurs positions, l'excentricité varie de grandeur et de direction.

2. Si la lecture se fait au moyen d'un microscope, comme au cercle mural de Gambey, la valeur des tours de la vis du micromètre en arc de cercle varie d'une quantité du même ordre que l'excentricité et proportionnelle à la projection de translation sur la normale fixe.

Théorème 3. *Si l'on suppose plusieurs normales fixes, la moyenne des lectures des points où elles rencontrent le cercle est affectée en général d'une erreur de même ordre que l'excentricité; mais dans le cas où le centre des moyennes distances de ces points est au centre du cercle, l'erreur est d'un ordre plus élevé;* dans les conditions théoriques que nous supposons, l'erreur ne dépasserait pas l'ordre du cube de l'excentricité.

Théorème 4. Si les lectures se font au micromètre, à la condition que l'on ait *des microscopes égaux et placés à égales distances des points qu'ils visent normalement, les nombres de tours de vis lus aux différents micromètres étant égaux*, l'erreur sur la lecture moyenne est d'un ordre plus élevé (troisième ordre) que l'excentricité, *lorsque le centre des moyennes distances des microscopes est au centre du cercle.*

5. Les formules données par M. de Littrow, dans son traité, expriment la proposition 3. Nous en déduisons en particulier que si l'on n'emploie que cinq microscopes sur les six microscopes disposés régulièrement autour du cercle de

Gambey, l'excentricité n'affecterait pas à la première puissance la moyenne de sept lectures ; savoir : les cinq lectures à chaque microscope et la lecture répétée des deux microscopes les plus voisins du microscope non employé.

S'il arrivait, par hasard, qu'un microscope fût mal scellé, on pourrait savoir, non-seulement quelle couple de microscopes diamétralement opposés est défectueuse, mais le microscope qui doit subir l'examen de l'artiste.

6. On sait qu'on peut énoncer ainsi la condition donnée ci-dessus de l'élimination de la première puissance de l'excentricité.

Une moyenne de lectures n'est pas sensiblement altérée par l'excentricité du cercle si chaque lecture, étant considérée comme une force égale à 1 et agissant dans la direction du rayon correspondant du cercle, l'ensemble des forces fictives qui en résultent est un système en équilibre.

7. Si, au lieu d'une graduation cylindrique, comme celle du cercle de Gambey, on suppose une graduation plane, dans une couronne circulaire, visée par des microscopes perpendiculaires au plan de la couronne et parallèles à l'axe de rotation du cercle, on élimine encore l'excentricité à la première puissance, si le centre des moyennes distances des points visés est sur l'axe ; la seconde puissance ne serait pas éliminée. Ce qui a été indiqué au n° 5 pourrait être dit du cercle méridien de MM. Secrétan et Eichens ; le n° 6 s'applique à un cercle dont la graduation est plane comme à un cercle gradué sur le pourtour cylindrique où est incrusté le limbe qui reçoit la graduation.

8. Si le limbe était tronc-conique et visé normalement par des microscopes égaux, l'excentricité n'affecterait pas la moyenne des lectures à faire aux points visés (on néglige les puissances de cette excentricité supérieures à la première), pourvu que le centre des moyennes distances des points visés fût sur l'axe de rotation du cercle.

Aux mêmes conditions, on peut dire avec une approximation de même ordre que l'excentricité n'affecterait pas la moyenne des lectures faites au micromètre, si les nombres de tours lus aux micromètres étaient égaux.

Séance du 1er février 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. Debray analyse les principaux points mis en lumière par ses recherches sur la dissociation des corps.

Rapport de M. Dausse sur la candidature de M. Colladon au titre de membre correspondant.

Séance du 8 février 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. l'abbé Aoust adresse une note sur un principe de la théorie des surfaces.

M. Alix rend compte de ses travaux sur l'anatomie de la Girafe et de l'Autruche.

M. Moreau fait connaître de nouvelles expériences qu'il a instituées pour l'étude du suc intestinal.

Rapport de M. Rouché sur les travaux scientifiques de M. Chio, candidat au titre de membre correspondant.

Sur un principe de la théorie des surfaces, par M. l'abbé Aoust.

I. — Il existe un principe d'une grande généralité dans la théorie des surfaces ; cette généralité provient d'une fonction arbitraire de l'angle que font entre elles les lignes coordonnées, laquelle entre dans la relation dont il s'agit. Ce

principe contient, comme cas particulier, la formule de Gauss, ainsi que celles que nous avons exposées dans notre dernière note présentée à la Société *sur la courbure des surfaces*. (Voir *l'Institut*, numéro du 2 janvier 1868.)

Nous conservons les notations dont nous avons fait usage dans cette note, avec cette différence que nous représentons par $\frac{1}{K_n}, \frac{1}{K_t}$ les rapports des binomes $\frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{l_1 l_2}, \frac{1}{R_2 R_1} - \frac{1}{L_1 L_2}$ au carré du sinus de l'angle φ des lignes coordonnées, $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}; \frac{1}{l_1}, \frac{1}{l_2}$ étant les composantes normales à la surface des courbures propres et des courbures inclinées des lignes coordonnées $d\sigma_1$, $d\sigma_2$; $\frac{1}{K_n}, \frac{1}{K_t}$ sont deux éléments qui s'introduisent d'eux-mêmes dans la théorie, et ils se composent de la même manière, le premier par rapport aux courbures normales, le second par rapport aux courbures tangentielles. Cela posé, si, dans les formules (31) de notre Théorie des lignes coordonnées, nous supposons les deux dernières surfaces orthogonales sur la première, les seconds membres de ces équations qui sont linéaires par rapport aux cosinus des angles des lignes coordonnées, se réduisent, et les deux premières formules deviennent :

$$d_2(J_1 \operatorname{cotg}\varphi) - d_1(I_2 \operatorname{cotg}\varphi) = d\omega \left\{ \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{K^n} + \sin\varphi \frac{\frac{d}{d\varphi}\operatorname{cotg}\varphi)}{K_t} \right\},$$

$$d_2(J_1 \sin^{-1}\varphi) - d_1(I_2 \sin^{-1}\varphi) = d\omega \left\{ \frac{\sin^{-1}\varphi}{K_n} + \sin\varphi \frac{\frac{d}{d\varphi}\sin^{-1}\varphi}{K_t} \right\},$$

Nous concluons de ces deux formules que si l'on représente par ψ une fonction arbitraire de l'angle φ, par ψ', ψ'' les dérivées, première et seconde, de cette fonction par rapport à φ, et qu'on pose pour abréger :

$$\frac{1}{H(\psi)} = \frac{\psi'}{K_n} + \sin\varphi \frac{\psi''}{K_t},$$

on a la double équation qui représente le principe dont il s'agit :

$$\{6\} \quad \left[d_2 (J_1 \psi') - d_1 (I_2 \psi') = \frac{d\,\omega}{H(\psi)}, \; d_1 (J_2 \psi') - d_2 (I_1 \psi') = \frac{d\,\omega}{H(\psi)} \right]$$

Si l'on remarque que l'on a aussi :

$$\{2\} \quad d_1 d_2 \psi = d_1 (J_2 \psi') - d_1 (I_2 \psi') = d_2 (I_1 \psi') - d_2 (J_1 \psi');$$

on déduit des équations {6} les deux suivantes :

$$\{1\} \qquad d_2 (I_1 \cdot \psi') - d_1 (I_2 \cdot \psi') = \frac{d\,\omega}{H(\psi)} + d_1 d_2 \psi ,$$

$$\{3\} \qquad d_2 (J_2 \cdot \psi') - d_1 (J_2 \cdot \psi') = \frac{d\,\omega}{(H\,\psi)} - d_1 d_2 \psi .$$

Ces deux formules forment un système de deux équations dont la résolution donne séparément les deux éléments qui se trouvent dans les seconds membres.

$$\{4\} \quad d_2 \{(I_1 + J_1) \psi'\} - d_1 \{(I_2 + J_2) \psi'\} = 2 \frac{d\,\omega}{H(\psi)} ,$$

$$\{5\} \quad d_2 \{(I_1 - J_1) \psi'\} - d_1 \{(I_2 - J_2) \psi'\} = 2 d_1 d_2 \psi .$$

Ces relations, comme il est aisé de le reconnaître, et comme l'indiquent les chiffres placés entre accolades, sont analogues à celles que nous avons déjà exposées ; mais elles sont générales, puisqu'elles se rapportent à une forme quelconque de la fonction ψ. Malgré leur généralité, elles n'en sont pas moins simples ; nous n'avons aucune raison de les altérer par l'introduction d'une hypothèse particulière sur les lignes coordonnées. Car, à simple vue, on peut supprimer les termes qui s'annulent par suite de cette hypothèse, tandis qu'il serait difficile de restituer les termes absents.

II. La généralité des conclusions qui en résultent, pour

ainsi dire intuitivement, nous fait aussi une nécessité de ne pas en restreindre la forme. En effet, si l'on intègre deux fois de suite les équations {1} et {3}, une première fois par rapport à ρ_1 entre deux valeurs de cette variable, une seconde fois par rapport à ρ_2 entre deux valeurs de cette seconde variable, l'élément superficiel devient l'aire d'un quadrilatère ; soient α, β, γ, δ, les angles de ce quadrilatère, et $\frac{d\,\sigma_i}{R_i}$, $\frac{d\,\sigma_i}{L_i}$ les projections tangentielles des angles de contingence propre ou inclinée de l'une des lignes du contour suivant que l'indice i sera égal à 1 ou à 2, on obtiendra les deux équations dans lesquelles le signe $\int$ s'étend à tout le contour,

$$\{7\}\quad \psi(\alpha) - \psi(\pi-\beta) + \psi(\gamma) - \psi(\pi-\delta) = -\int \psi' \frac{d\,\sigma_i}{R^i} - \int\int \frac{d\,\omega}{H(\psi)},$$

$$\{8\}\quad \psi(\alpha) + \psi(\pi-\beta) + \psi(\gamma) - \psi(\pi-\delta) = \int \psi' \frac{d\,\sigma_i}{L^i} + \int\int \frac{d\,\omega}{H(\psi)}.$$

On voit que la première est analogue à celle de M. Bonnet, et que le premier terme du second membre s'évanouit lorsque le quadrilatère est géodésique.

III. Les formes de la fonction ψ sont en nombre infini, il y en a quatre qui méritent attention.

1° Lorsque $\psi(\varphi) = \varphi$, l'élément $\frac{1}{H(\psi)}$ devient $\frac{1}{K_n}$ et l'on trouve les formules de Gauss et de M. Bonnet.

2° Lorsque $\psi(\varphi) = \cos\varphi$, alors, si l'on représente par u et v les angles plans de deux trièdres qui entrent dans la question, l'élément $\frac{1}{H(\psi)}$ devient l'élément considéré

par M. Gilbert $\left(\frac{\cos u}{R_1 R_2} - \frac{\cos v}{L_1 L_2}\right)$ et l'on retrouve le théorème dû à ce savant géomètre, théorème analogue à celui de Gauss et aussi celui qui est analogue à celui de M. Bonnet.

3° Lorsque $\psi(\varphi) = \text{Log. } \sin\varphi$, si l'on représente par u et v les angles de deux trièdres qui existent dans cette question, l'équation {7} devient :

$$-\int\int \frac{d\sigma_1\, d\sigma_2}{\sin^2\varphi}\left\{\frac{\cos u_1}{R_1 R_2} - \frac{\cos v_1}{L_1 L_2}\right\} = \text{Log. } \frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\sin\beta \sin\delta}$$

$$+\int \text{cotg } \varphi \frac{d\sigma_i}{R_i}.$$

4° Lorsque $\psi(\varphi) = \text{Log. tang } \frac{1}{2}\varphi$, u_2, v_2 étant les angles de deux nouveaux trièdres qui existent dans la question, la même équation {7} donne :

$$+\int\int \frac{d\sigma_1\, d\sigma_2}{\sin^2\varphi}\left\{\frac{\cos u_2}{R_1 R_2} - \frac{\cos v_2}{L_1 L_2}\right\} = \text{Log. } \{\text{tg } \tfrac{1}{2}\alpha.$$

$$\text{tg } \tfrac{1}{2}\beta.\ \text{tg } \tfrac{1}{2}\gamma.\ \text{tg } \tfrac{1}{2}\delta\} + \int \sin^{-1}\varphi \frac{d\sigma_i}{R_i}.$$

et l'on voit que ces deux dernières formes de ψ nous sont imposées par les équations (31).

Il est inutile de dire que l'équation {8} donne naissance à des formules du même ordre au nombre de huit.

Quelle que soit la forme de ψ, l'élément $\frac{d\omega}{H(\psi)}$ ne dépend jamais que des paramètres différentiels du premier ordre et de leurs variations, et de l'angle des lignes coordonnées. Cet élément reste inaltérable dans la déformation des surfaces applicables.

Si, maintenant, on élimine des équations du n° I les variations des projections tangentielles des angles de contingence propre et inclinée des lignes coordonnées au moyen des formules du n° VIII de notre premier mémoire sur les

coordonnées (Journal de Crelle), formules dans lesquelles il n'y a rien à changer, on tombe sur une série de formules que nous n'avons aucun intérêt à transcrire, et qui sont analogues aux relations entre les courbures propres et les courbures inclinées qui se trouvent dans les numéros X et XI du mémoire déjà cité. Ces formules renferment la première du n° III de la dernière note de M. Gilbert, et que Cauchy avait déjà fait connaître en 1844 (Comptes rendus, 1844).

Outre les deux mémoires d'analyse que nous avons publiés sur les coordonnées curvilignes, nous en avons écrit deux autres qui ont été présentés en 1861 et 1862, l'un au Comité des Sociétés savantes et l'autre à l'Académie des sciences de Paris. Ces mémoires, exclusivement géométriques, qui se trouvent dans les archives de ces deux Sociétés, seront publiés, et les lecteurs pourront se convaincre que l'un des deux repose exclusivement sur la formule *des courbures inclinées*, sans que pourtant nous ayons eu besoin d'introduire l'angle des tangentes conjuguées.

Séance du 15 février 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. Ribaucour fait une communication sur les courbes enveloppes de cercles et les surfaces enveloppes des sphères. Il énonce en outre ce théorème : lorsque, pour une surface, les rayons de courbure principaux en chaque point sont fonction l'un de l'autre, les nappes de la surface des centres de courbure de la surface considérée sont applicables sur une surface de révolution.

Sur les courbes enveloppes de cercles, et sur les surfaces enveloppes de sphères, par M. Ribaucour.

I. — *Si de chacun des points d'une spirale logarithmique, comme centre, on décrit un cercle orthogonal à un cercle fixe, ayant son centre au pôle de la spirale, la somme de deux arcs correspondants de l'enveloppe est évaluable en arc d'hyperbole.*

Si de tous les points d'une épicycloïde, comme centres, on décrit des cercles orthogonaux à un cercle fixe, concentrique à la base de l'épicycloïde, la somme de deux arcs correspondants de l'enveloppe est évaluable en arc d'ellipse.

Une courbe (C) roule sur une droite (D) en entraînant un point *o* qui décrit une trajectoire (O); de tous les points de (O) comme centres on décrit des cercles tangents à la droite (D) :

La somme des arcs correspondants de l'enveloppe de cette série de cercles est double de la longueur correspondante de la seconde podaire positive de (C) *par rapport au point* o.

Si de tous les points d'un arc (C), comme centres, on décrit des cercles orthogonaux à un cercle fixe de centre *o*, l'enveloppe de cette série de cercles est ce que M. Moutard a appelé une courbe anallagmatique.

Je désignerai par *aire de cette anallagmatique* la différence des aires comprises entre chacune des branches de l'enveloppe la ligne (C) et les normales extrêmes.

Lorsque le point *o* se déplace dans le plan, en entraînant avec lui le cercle orthogonal à toute la série, l'anallagmatique se déforme et son aire varie.

Il y a un point dans le plan pour lequel l'aire de l'anallagmatique est un minimum; ce point est le centre de gravité de l'arc (C) *supposé chargé en chacun de ses éléments d'une masse proportionnelle à la courbure.*

Si le point o *se déplace sur un cercle ayant pour centre ce point particulier, l'aire de l'anallagmatique reste constante.*

Considérons toutes les séries de cercles ayant même ligne de centres, les rayons de l'une d'elles se déduisant de ceux d'une autre par la relation :

$$R' = kR.$$

La différence entre la longueur de la courbe enveloppe des cordes communes d'une série et l'arc correspondant de la développée de (C) *est proportionnelle au carré du coefficient* k.

Supposons que l'on charge chaque branche de l'enveloppe, en chacun de ses points, d'une masse proportionnelle à l'angle de contingence, et qu'on cherche le centre de gravité du système formé par deux arcs correspondants de l'enveloppe.

Les centres de gravité de courbure de toutes les séries sont situés sur une même droite passant par le centre de gravité de courbure de l'arc correspondant de la ligne des centres, et le quotient de leur distance à ce point par le carré du coefficient k *est constant.*

Supposons les courbes enveloppes matérielles et homogènes, et cherchons leur centre de gravité, en admettant que les masses sont positives sur l'une des branches et négatives sur l'autre.

Les centres de gravité de toutes les enveloppes sont en ligne droite.

Le centre de gravité de l'aire comprise entre deux courbes parallèles fermées coïncide avec le centre de gravité de la courbe parallèle médiane.

Si les courbes ne sont pas fermées, les deux centres de gravité sont sur une droite parallèle à la bissectrice de l'angle des normales extrêmes.

II. — De tous les points d'une courbe gauche (C) on décrit des sphères dont les rayons sont liés par une relation permettant d'en connaître le rayon lorsque la position du centre est fixée sur la courbe donnée. Ces sphères ont une enveloppe qui admet un système de lignes de courbures circulaires.

Les normales à l'enveloppe le long de l'un des cercles de courbure forment un cône de révolution.

Les centres de courbures principaux, sur ces normales, sont le sommet du cône et les différents points d'une conique section du cône par un plan perpendiculaire au plan osculateur en c *à* (C).

La surface tangente aux normales à l'enveloppe des sphères

se compose de (C) *et d'une surface qui admet une série de sections planes du second degré; les lignes conjuguées de ces coniques sont des géodésiques passant par les ombilics de la surface; elles sont toutes égales entre elles.*

En particulier : *les géodésiques passant par deux ombilics opposés d'un ellipsoïde sont toutes égales entre elles.*

Supposons que la ligne des centres (C) soit déformée en conservant même tangente et même plan osculateur au point *c*.

Quelle que soit la déformation, le plan de la conique correspondant au point c *rencontre la tangente en* c *à* (C) *en un point fixe.*

Les différentes lignes de courbure circulaires ont une enveloppe formée de deux branches que, d'après Monge, nous nommerons l'arête de rebroussement de l'enveloppe de sphères.

L'arête de rebroussement est l'intersection de la surface enveloppe avec la surface tangente aux normales de l'enveloppe.

Les différentes arêtes de rebroussement des enveloppes parallèles forment, sur la surface tangente aux normales, une série de lignes orthogonales aux géodésiques ombilicales.

Sur chacune de ces courbes orthogonales aux géodésiques passant par les ombilics, on doit considérer des arcs correspondants, puisqu'elles sont les enveloppes des lignes de courbure circulaires d'une enveloppe de sphères.

La différence entre les arcs correspondants d'une trajectoire orthogonale, comprise entre deux coniques tracées sur la surface, est proportionnelle à la distance d'un ombilic à cette trajectoire.

Si l'on déforme la ligne des centres (C) *sans faire varier sa seconde courbure, la différence de deux arcs correspondants de l'arête de rebroussement reste constante.*

Si l'on déforme (C) *sans faire varier sa première courbure, la somme de deux arcs correspondants de l'arête de rebroussement reste constante.*

Si l'on déforme (C) *d'une manière quelconque, l'aire de la surface enveloppe de sphères comprise entre deux lignes de courbure circulaire reste constante; le volume compris entre la surface et les plans de ces deux cercles reste aussi constant.*

Si parmi les lignes de courbure non circulaires d'une enve-

loppe de sphères, deux sont planes, toutes les autres le sont aussi; tous ces plans passent par une même droite; si l'on rabat les lignes de courbure autour de cette droite sur un même plan, on peut les considérer comme les trajectoires orthogonales d'une série de cercles.

Si (C) est une courbe plane, elle admet deux lignes de courbure situées dans ce plan. *Les surfaces gauches passant par l'une de ces lignes et toutes les lignes de courbure non circulaires de l'enveloppe rencontrent le cylindre, dont le lieu des centres des cercles de courbure est la base, suivant des courbes dont les ordonnées au-dessus du plan de* (C) *sont entre elles dans un rapport constant.*

La longueur d'un arc de géodésique tracée sur une surface de révolution est proportionnelle à l'aire comprise entre la projection de cet arc, sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, et les rayons issus du pied de l'axe aboutissant aux projections des extrémités de l'arc.

III. — De tous les points d'une surface (S) on décrit des sphères dont les rayons sont liés aux coordonnées des centres par une relation permettant d'en connaître le rayon lorsque la position du centre est fixée sur la surface donnée. Ces sphères ont une enveloppe qui se compose de deux nappes.

A une ligne tracée sur (S) correspondent deux lignes tracées sur les deux nappes de l'enveloppe.

Par chaque point de (S) *passent deux lignes telles que les courbes correspondantes tracées sur les deux nappes sont égales.*

Si l'on joint deux à deux les quatre centres de courbure principaux situés sur les normales aux deux nappes issues d'un point de (S) on a quatre droites qui donnent lieu à deux points d'intersection.

Quelle que soit la déformation de la surface des centres aux environs du point considéré, cette droite qui joint ces deux derniers points d'intersection rencontre le plan tangent en un point fixe.

Si l'on trace un contour fermé quelconque sur la surface des centres (S), on a deux contours analogues sur les deux nappes de l'enveloppe.

1° Quelle que soit la déformation de (S), *la somme des va-*

leurs sphériques des aires limitées par ces deux contours est constante.

2° *Quelle que soit aussi la déformation de* (S), *la somme des aires comprises entre ces deux contours est constante.*

3° *Le volume compris entre les normales issues du contour tracé sur* (S) *et les deux nappes de la surface enveloppe reste constant, quelle que soit la déformation de* (S).

Si l'on considère toutes les séries de sphères dérivées d'une série par l'équation :

$$R' = kR$$

pourvu que la surface (S) soit une surface à étendue *minima*,

1° *La différence entre les aires de deux contours conjugués relatifs à un contour tracé sur* (S) *est proportionnelle au cube du coefficient* k.

2° *La différence entre les volumes limités par les contours conjugués, le contour tracé sur* (S) *et les normales à l'enveloppe issues de ce dernier, est proportionnelle à la quatrième puissance du coefficient* k.

En général, si l'on considère la droite qui joint deux points conjugués relatifs à un point de (S), cette droite, dans ses différentes positions, n'est pas normale à une surface ; mais s'il arrive que pour une enveloppe de sphères ces cordes de contact soient toutes normales à une même surface, les enveloppes de sphères dérivées par l'équation

$$R' = kR$$

jouiront de la même propriété.

Les centres de courbure principaux situés sur toutes les cordes de contact relatives à un point de (S) *appartiennent à une même conique.*

La considération des enveloppes de sphères montre que : *si l'on trace une série de courbes sur une surface, et que l'on mène tous les plans normaux à la surface tangente à ces courbes, ces plans sont tangents à une autre surface.*

J'en déduis que : *si deux surfaces, vues d'un point quel-*

conque de l'espace semblent se couper à angle droit, elles sont tangentes aux normales d'une même surface (1).

Séance du 22 février 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

Lettre de M. de Caligny, transmettant une note relative aux expériences faites à Billancourt sur un de ses appareils à élever l'eau au moyen d'une chute d'eau.

M. Laurent donne quelques détails sur le forage du puits artésien de la Chapelle et sur les instruments employés pour l'achèvement de ce travail.

M. de Caligny a communiqué dans cette séance quelques résultats d'expériences sur son appareil à élever de l'eau, au moyen d'une chute d'eau, qui a fonctionné aux expositions universelles de 1855 et 1867.

Il rappelle que, dans un mémoire publié sur cet appareil dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville (année 1862, pages 169 à 200), il n'avait annoncé qu'un effet utile de 50 pour cent en eau élevée. Aujourd'hui l'effet utile paraît dépasser sensiblement 60 pour cent, et l'auteur espère obtenir 70 au moyen d'une construction plus soignée.

Le jury international de l'exposition universelle de 1867 lui a décerné une médaille d'argent, surtout à l'occasion de ces nouvelles expériences. Il est peut-être convenable d'at-

---

(1) Il y a déjà quelque temps, M. Mannheim est arrivé à cette proposition par une voie toute différente.

tendre la publication du rapport avant de rendre compte de tous les détails des expériences faites par la Commission. Mais M. de Caligny croit savoir que le jury a admis un effet utile moyen ayant peu différé de 60 pour cent. Il espère, au reste, que ces expériences vont être variées à l'Ecole d'agriculture de Grignon, où cet appareil doit être employé à faire des irrigations d'une manière utile.

Le jeu automatique du système repose sur un principe nouveau de succion, assez difficile à comprendre. Plusieurs savants ont cherché à l'expliquer; mais quand on a voulu en donner des explications différentes de celles qui se trouvent dans le mémoire précité de 1862, on a dit des choses contraires aux faits observés.

Le phénomène dont il s'agit manifeste d'autant plus son intensité, que la levée alternative du tube mobile (qui peut à la rigueur être la seule pièce mobile du système) est moindre relativement au diamètre du tuyau de conduite fixe. On sait donc mieux ce qu'on fait, quand ces levées sont relativement assez petites. Or, dans les dernières expériences dont il s'agit, on a augmenté l'effet utile en ne donnant pas à ces levées autant de hauteur qu'il semblait, au premier aperçu, qu'on devait le faire.

Comme il faut une certaine vitesse de sortie de l'eau pour engendrer une force de succion convenable au but proposé, on conçoit que, pourvu qu'il n'en résulte pas trop de force vive perdue par suite d'une vitesse suffisante, l'espèce d'étranglement resultant d'une petite levée n'a pas l'inconvénient d'un étranglement qui aurait lieu pour des vitesses permanentes, tandis qu'ici les vitesses augmentent graduellement.

M. de Caligny, en étudiant les diverses résistances passives, a été conduit par le calcul différentiel à une équation du troisième degré, d'où il résulte qu'il n'est pas nécessaire, pour un bon effet utile que la quantité d'eau élevée à chaque période de l'appareil soit aussi grande qu'on l'avait cru jusqu'à ce jour. Cela explique pourquoi, dans certaines limites, d'assez petites levées du tube mobile, fournissant ainsi un orifice d'écoulement moindre qu'on ne l'avait cru nécessaire, ont pu augmenter *l'effet utile*, expressions qui désignent, comme on sait, un rapport dans les ouvrages sur l'hydraulique.

M. de Caligny reviendra sur ce sujet après de nouvelles

expériences sur les diverses parties des résistances passives ; mais on peut provisoirement admettre qu'il est rationnel de diminuer de moitié la levée du tube mobile, qui donnerait une section de sortie égale à celle du tuyau de conduite fixe, du moins dans certaines circonstances.

Sur le puits artésien de la place Hébert, par M. Laurent.

Dans la séance du 23 février 1867, j'ai eu l'honneur d'entretenir la Société de diverses circonstances assez graves qui étaient survenues dans le tubage du puits artésien foré place Hébert, à la Chapelle.

Vous le savez donc, on avait été en apparence assez heureux pour faire arriver un tube unique de $1^m,62$ de diamètre intérieur jusqu'à une profondeur de $121^m,66$, mais à cette profondeur, malgré tous les efforts, il avait été impossible de le pousser plus loin. On avait dû s'arrêter parce que la base du tube se déplaçait de la verticale et qu'en outre une déformation se manifestait sur une longueur de près de onze mètres, en différents points.

Le remède était simple, c'était celui prévu dès le principe, qui consistait à descendre une deuxième série de tubes. Ceux-ci offraient encore un diamètre intérieur de $1^m,39$, supérieur aux exigences du traité qui portait l'arrivée à la craie à $1^m,20$ au maximum.

Cette circonstance de déplacement et de déformation nous a forcé à prendre quelques centimètres sur les dimensions que cette seconde colonne de tubes aurait pu avoir si tout avait marché régulièrement, et cela était prudent, car, malgré cette diminution du diamètre, cette dernière colonne s'enserra à l'endroit où la précédente avait souffert, et éprouva elle-même une déformation assez sensible. M. Gault, qui dirige ce travail avec une rare intelligence, eut l'ingénieuse idée d'adopter des galets au trépan, de manière à exercer des pressions successives sur les génératrices et de

récalibrer ainsi cette colonne. Ce procédé assez énergique a parfaitement réussi et le mal ainsi réparé ne s'est pas reproduit.

Cette circonstance fâcheuse a permis d'apprécier une fois de plus l'énorme importance d'une verticalité aussi complète que possible dans de semblables travaux et quelle gravité peuvent acquérir des déviations. En effet, on comprend que nos instruments ne peuvent que momentanément abandon ner la verticale, ils y reviennent toujours, la difficulté passée; mais alors le sondage présente une courbure plus ou moins prononcée en ce point. Or, si la partie convexe de cette courbure arrivait jusqu'à la moitié du diamètre, non seulement la descente du tubage pourrait être fatalement entravée, mais la marche de la sonde elle-même.

Quelques reproches que l'on puisse faire à un sondeur de manquer d'audace s'il se refuse à des moyens énergiques pour arriver à tel ou tel résultat désiré, si ces moyens ne lui présentent qu'une sécurité douteuse, il devra toujours préférer le reproche à risquer de compromettre un sondage par des manœuvres en dehors des règles de la prudence, et j'appelle ainsi toutes celles dont l'efficacité peu assurée expose à des inconvénients probables ou seulement possibles. L'audace devient alors de la témérité, et si celle-ci a quelquefois donné le succès, bien plus souvent aussi elle a amené des déceptions.

Dans le cas présent, on voit que si la première colonne, maintenue libre à sa base, n'eût été abandonnée qu'à son propre poids, qui était de 100 000 kilogrammes environ, poids bien suffisant pour vaincre des frottements énergiques, elle se fût arrêtée vers 105 ou 110 mètres. A cette profondeur, elle ne marchait plus que difficilement et dans un terrain ébouleux seulement sur un côté; il devenait donc redoutable de la forcer dans sa descente. On devait conclure qu'il fallait de fortes pressions latérales pour la retenir et on avait la certitude que celles-ci se faisaient inégalement. Malgré la perspective séduisante de mener un tubage unique jusqu'à 123 mètres, si on se fût arrêté à 110 mètres, il faut reconnaître aujourd'hui qu'on eût évité 10 mètres d'un tubage inutile, gagné du temps, ce qui se serait traduit par 100 mètres de profondeur acquise en plus, assuré une verticalité complète de l'ensemble, tandis qu'aujourd'hui on

n'en est sûr qu'à quelques centimètres près. Si bien qu'avant de descendre la colonne définitive qui devra aller jusqu'à la nappe aquifère, il faudra s'assurer de cette verticalité. Pour cela, on descendra une dizaine de mètres de cette colonne comme calibre, avant d'en opérer la construction complète, qui ne comportera pas moins de 600 mètres de longueur.

Les essais de toute nature et le tubage complet des terrains tertiaires ont duré du 16 décembre 1866 au 20 juillet 1867, plus de six mois. Le 21 juillet la craie a été attaquée, au diamètre de $1^m,35$, et au 31 décembre on était à $330^m,39$, ce qui donnait depuis $137^m,75$ un approfondissement de $192^m,64$, soit environ $1^m,18$ par jour, en y comprenant, accidents, jours de fêtes ou chômages.

Le 1er janvier 1868, on a arrêté les travaux pour réparations et modifications importantes aux machines; elles ont été terminées le 14 février. Aujourd'hui, 22, on est arrivé à la profondeur de $339^m,92$, en bonne et régulière marche de $1^m,10$ à $1^m,15$ par jour.

Cette nécessité de réparation a eu ce côté favorable en ce que l'interruption des travaux a eu lieu dans un moment rigoureux de la saison. Or, pour la manœuvre des sondes, les grands abaissements de température sont les instants fertiles en accidents à cause des ruptures plus fréquentes des fers.

Séance du 29 février 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. Transon fait la communication suivante : Application de l'algèbre des nombres directifs à la géométrie.

M. Chio, de Turin, est nommé membre correspondant.

Séance du 7 mars 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. Delanoue rend compte d'un travail de M. Chevalier sur le système de Cialdi, destiné à combattre les atterrissements en avant des jetées.

Communication de M. de la Gournerie sur les lignes spiriques.

Séance du 14 mars 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. Laussedat fait une communication sur le sidérostat.

M. Laguerre traite des cassiniennes planes et sphériques.

M. Transon complète l'exposé de ses recherches sur l'application de l'algèbre des nombres directifs à la géométrie.

Sur les cassiniennes planes et sphériques, par M. Laguerre.

1. On peut considérer une anallagmatique sphérique comme le lieu des points de contact des plans tangents à une conique fixe K et à une sphère. Soit S le cercle suivant lequel le plan de la conique coupe la sphère; si l'on peut inscrire dans le cercle S un quadrilatère circonscrit à la conique K (et alors, d'après le théorème de Poncelet, on pourra le faire d'une infinité de façons) en désignant par α, β, γ, δ, les

sommets consécutifs d'un tel quadrilatère, les divers points m de l'anallagmatique satisferont à une relation de la forme

$$\frac{m\alpha . m\gamma}{m\beta . m\delta} = \text{constante}.$$

J'ai signalé cette propriété dans une note insérée au *Bulletin de la Société philomathique* (mars 1867).

Les courbes qui jouissent de cette propriété constituent dans l'ensemble des anallagmatiques un groupe remarquable et jouissant de propriétés spéciales dignes d'intérêt. Je les désignerai sous le nom de *cassiniennes*, par analogie avec l'ellipse de Cassini qui peut être regardée comme leur type principal.

2. Je vais donner ici une autre définition de ces courbes, qui, quoique moins simple peut-être en apparence que la précédente, se prête bien mieux aux recherches géométriques.

Soit, en général, tracée sur une sphère une anallagmatique; par cette courbe passent quatre cônes dont les sommets forment un tétraèdre conjugué par rapport à la sphère. Prenons une quelconque des arêtes de ce tétraèdre et l'arête opposée qui est sa polaire par rapport à la sphère. Il sera facile d'établir les propositions suivantes. Toute droite qui passe par un point a de l'anallagmatique et qui s'appuie sur les deux arêtes du tétraèdre considérées, coupe la sphère en un second point b qui appartient aussi à l'anallagmatique. Je dirai que les deux points a et b sont conjugués, et, pour simplifier le langage, j'appellerai simplement *corde* la droite qui joint deux points conjugués. Si l'on désigne par P et Q les points où l'une des arêtes considérées coupe la sphère, il résulte de ce qui précède que deux points conjugués quelconques et les points P et Q sont toujours situés sur un même cercle et partagent ce cercle enharmoniquement. Par suite, si l'on appelle I le point milieu du segment PQ, il en résulte que le produit des distances du point I à deux points conjugués quelconques est constant et que les droites qui joignent ce point milieu aux deux points conjugués sont dans le même plan que la droite PQ et également inclinées sur cette droite (*).

(*) Le point I est donc pour l'anallagmatique un des points que

3. Comme dans un tétraèdre il existe trois couples d'arêtes opposées, on voit que pour une anallagmatique donnée, on peut imaginer trois modes de groupement des points.

Or, si la courbe est une *cassinienne*, on pourra choisir les deux arêtes du tétraèdre de telle sorte que les points conjugués fournis par le mode de groupement correspondant jouissent de la propriété suivante :

Si l'on prend le conjugué harmonique d'un point quelconque de la sphère P par rapport à chaque couple de points conjugués (**), c'est-à-dire si, sur le cercle passant par le point P et chaque couple de points conjugués, on prend le conjugué harmonique de ce point, le lieu des points ainsi obtenus est un cercle.

Pour abréger, je désignerai simplement ce cercle sous le nom de *cercle correspondant au point P.*

La propriété précédente est caractéristique et peut servir de définition à la cassinienne.

Considérons une sphère et deux droites quelconques dont chacune soit la polaire réciproque de l'autre par rapport à la sphère. Sur cette sphère on peut tracer une infinité de courbes jouissant de la propriété énoncée au paragraphe 2, que toute droite passant par un point de la courbe et s'appuyant sur les deux droites fixes dont je viens de parler rencontre la sphère en un second point de la courbe. Je désignerai les deux points de la courbe situés sur une telle droite sous le nom de points conjugués. Maintenant, considérons le lieu des points qui sont conjugués harmoniques d'un point R de la sphère, par rapport aux différents couples de points conjugués d'une courbe quelconque de l'espèce dont je viens de parler. Si ce lieu est un cercle pour une position particulière quelconque du point P, il en sera de même quelle que soit la position de ce point sur la sphère et la courbe considérée sera une cassinienne.

M. Moutard a désignés sous le nom de *pôles secondaires de transformation.*

(**) Voir *Bulletin de la Société philomathique*, février 1867.

Dans tout ce qui suit, je considérerai exclusivement le mode de groupement qui donne lieu à la proposition énoncée ci-dessus; en sorte que le point conjugué d'un point de la courbe sera parfaitement déterminé. Des deux arêtes du tétraèdre considérées, il y en a toujours une qui coupe la sphère en deux points réels; je désignerai ces deux points par les lettres P et Q.

Ceci posé, on établira facilement les propositions suivantes.

4. *Si l'on considère une corde quelconque d'une cassinienne, c'est-à-dire la droite qui joint deux points conjugués, sa polaire réciproque par rapport à la sphère, sur laquelle est tracée la cassinienne, rencontrera cette sphère en deux points conjugués de la courbe et sera par conséquent aussi une corde.*

De là résulte que la surface engendrée par toutes les cordes, surface qui est du 4e degré, est à elle-même sa polaire réciproque.

5. La propriété précédente constitue une propriété caractéristique des cassiniennes et l'on peut énoncer la propriété suivante :

Si une anallagmatique est telle qu'une droite passant par deux points de cette courbe ait pour polaire, par rapport à la sphère sur laquelle elle est tracée, une droite rencontrant la courbe en deux points, cette anallagmatique est une cassinienne dont la droite proposée ainsi que sa polaire sont des cordes; et alors, d'après le théorème précédent, il y a une infinité de droites qui jouissent de la même propriété.

6. *Si A désigne le cercle correspondant à un point R de la sphère, les cercles correspondants aux divers points du cercle A passeront par le point R.*

7. *Le cercle correspondant à un point de la courbe lui est tangent en ce point et coupe la courbe en deux autres points qui sont conjugués.*

8. Considérons une corde quelconque d'une cassinienne; par cette corde on peut mener quatre plans tangents à la courbe. Deux des points de contact se trouveront sur la polaire de la corde, les deux autres seront deux points conjugués. Si, par la corde qui joint ces deux derniers points, on mène des plans tangents à la courbe, deux des points de

contact seront les points conjugués formant les extrémités de la première corde considérée.

Deux cordes liées entre elles de la façon que je viens d'indiquer seront dites *cordes associées*.

Leur propriété principale est renfermée dans la proposition suivante :

Toute droite qui touche la sphère sur laquelle est tracée une cassinienne en un point de cette courbe et rencontre une de ses cordes, rencontre aussi la corde qui lui est associée.

9. Cette propriété donne lieu au théorème suivant :

Si une droite se déplace en s'appuyant sur deux droites fixes et en restant tangente à une sphère, la courbe suivant laquelle la surface ainsi engendrée touche la sphère est une cassinienne dont les deux droites fixes sont deux cordes ; et, d'après la proposition précédente, *la cassinienne ainsi obtenue peut être engendrée d'une infinité de façons au moyen de deux cordes associées quelconques de la courbe.*

10. Une cassinienne est complétement définie lorsqu'on connaît les deux points P et Q, qui sont conjugués harmoniques par rapport à tous les couples de points conjugués, et le cercle A correspondant à un point R de la sphère.

Soit M un point quelconque de la sphère et N son réciproque par rapport au cercle A, je veux dire le point où la sphère est percée par la droite qui joint le point M au pôle du plan du cercle. Il est facile de déterminer sur la sphère deux points α et γ, qui soient en rapport anharmonique avec les points M et R, ainsi qu'avec les points P et Q. On peut, si l'on veut, considérer les droites P Q et M R ainsi que leurs polaires ; il y aura deux droites qui les rencontreront toutes les quatre, et ces droites seront elles-mêmes polaires réciproques. Par suite, il y en aura une et une seule qui coupera la sphère en des points réels ; ces deux points seront les deux points α et γ cherchés. On déterminerait de même deux points β et δ qui soient conjugués harmoniques par rapport aux couples de points N, R et P, Q.

Cela posé, un point quelconque m de la cassinienne considérée satisfera à la relation suivante :

$$\frac{m\alpha.\ m\gamma}{m\beta.\ m\delta} = \text{Constante.}$$

On voit que les points α et γ sont deux points conjugués de la sphère, en prenant ce mot dans le sens où je l'ai employé au § 3, c'est-à-dire que la droite $\alpha\gamma$ rencontre la droite fixe P Q ainsi que sa polaire; il en est de même des points β et δ. De plus il est évident que l'un des quatre points peut être pris arbitrairement. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Etant donnée une cassinienne et étant pris arbitrairement sur la sphère sur laquelle elle est tracée un couple quelconque de points conjugués, il est toujours possible de trouver un autre couple de points conjugués, de telle sorte que le produit des distances d'un point de la courbe aux points du premier couple soit dans un rapport constant avec le produit des distances du même point aux points du second couple.

11. En particulier, il y existe toujours sur une sphère un couple de points conjugués qui sont diamétralement opposés. Pour les obtenir il suffit de mener par le centre de la sphère une droite s'appuyant sur la droite P Q et sur sa polaire. Désignons par a et a' ce couple de points; on pourra déterminer d'après le théorème précédent deux autres points c et d, tels que pour tout point de la courbe l'on ait la relation :

$$\frac{ma.\ ma'}{mc.\ md} = \text{Constante.}$$

ou encore :

$$\frac{\sin \frac{1}{2} \widehat{ma}.\ \sin \frac{1}{2} \widehat{ma'}.}{mc.\ md} = \text{Constante};$$

et, comme $\sin \frac{1}{2} \widehat{ma'} = \cos \frac{1}{2} \widehat{ma}$, la relation précédente pourra s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{\sin \widehat{ma}}{mc.\ md} = \text{Constante}.$$

D'où la proposition suivante :

Étant donnée une cassinienne, on peut toujours déterminer un diamètre de la sphère sur laquelle elle est tracée et deux points fixes de cette sphère, de telle sorte que le produit des distances d'un point quelconque de la courbe aux deux points fixes divisé par la distance de ce même point au diamètre donne un quotient constant.

12. Si par une corde d'une cassinienne fixe et deux points conjugués quelconques, on mène des plans, ces divers plans forment un faisceau en involution, et les deux plans doubles de l'involution coupent la sphère suivant deux cercles orthogonaux.

13. Soient A, B et C, D deux couples quelconques de points conjugués d'une cassinienne; et soient a, b, c, d, les points de la sphère qui leur sont diamétralement opposés; m, désignant un point quelconque de la courbe, la différence des aires des triangles sphériques mac et mbd est constante.

14. Les cassiniennes se changent en cassiniennes par une transformation quelconque par rayons vecteurs réciproques. Aux couples de points conjugués de la première courbe correspondent des couples de points conjugués de la transformée.

En particulier, au moyen d'une projection stéréographique, les cassiniennes sphériques se transforment en cassiniennes planes. Je me bornerai, au sujet de ces courbes, à énoncer quelques propriétés que ne partagent pas les cassiniennes sphériques.

Si l'on désigne par a, b et c, d deux couples quelconques de points conjugués, la différence des angles sous lesquels ces segments ac, et bd, sont vus d'un point quelconque de la courbe est constante.

15. Dans le cas où la cassinienne est du 3e degré, la différence de ces angles est nulle.

On peut donc dire que la cassinienne cubique est *le lieu d'où deux segments de droite sont vus sous des angles égaux.*

L'on en déduit que *si l'on joint un point fixe de la courbe à tous les couples de points conjugués, toutes les droites ainsi obtenues sont également inclinées sur deux droites fixes rectangulaires.*

16. Le lieu des points milieux des droites qui joignent les

points conjugués d'une cassinienne plane est un cercle. Lorsque la cassinienne est du 3e degré, ce cercle se réduit à une droite.

Par chaque point de ce cercle (ou de cette droite) passent deux *cordes* de la cassinienne se coupant orthogonalement.

L'enveloppe des cordes d'une cassinienne plane est une courbe de quatrième classe ayant pour foyers les deux foyers singuliers de la courbe et les deux points fixes du plan qui sont en rapport harmonique avec chaque couple de points conjugués.

Lorsque la cassinienne est du troisième degré, elle n'a plus qu'un foyer singulier et l'enveloppe des cordes est alors une courbe de troisième classe.

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à cette dernière courbe se compose de la cassinienne elle-même et de la droite, lieu des points milieux des droites qui joignent les points conjugués.

17. Les cassiniennes cubiques planes ont été depuis longtemps étudiées sous le nom de *focales*. On peut consulter à ce sujet divers travaux de MM. Quetelet, Dandelin et Chasles dans les *Mémoires de l'Académie de Bruxelles* et la *Correspondance mathématique de Quetelet*.

Le tome V de cette dernière collection renferme à ce sujet un très-intéressant mémoire de M. Van Rees, qui y a donné les propriétés énoncées dans le § 15 et en a déduit les principales conséquences.

Séance du 21 mars 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. Alix décrit quelques particularités de l'anatomie de l'Autruche.

M. Fischer donne des détails sur la structure de l'estomac du *Delphinus griseus*.

Séance du 28 mars 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. Laguerre fait une communication sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiques.

M. Cazin rend compte des expériences qu'il a instituées récemment pour étudier le travail intérieur dans les gaz.

Sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiques, par M. Laguerre.

1. Étant donnée une sphère fixe S et un plan quelconque P, par le cercle d'intersection de la sphère et du plan, on peut faire passer deux cônes *isotropes*. Soient p et p' les sommets de ces cônes; ces deux points sont réciproques par rapport à la sphère S; pour abréger le discours, je dirai que ces deux points sont associés au plan P, et réciproquement que le plan P est le plan associé au point p et au point p'.

Cela posé, on peut énoncer les deux lemmes suivants :

Lemme 1. *Si un plan pivote autour d'un point fixe O, le lieu des points associés au plan dans ses diverses positions est une sphère ayant pour centre le point O, et coupant orthogonalement la sphère fixe S.*

Lemme 2. *Si un plan tourne autour d'une droite fixe, le lieu des points associés au plan dans ses diverses positions est un cercle ayant pour centre le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère S sur la droite et coupant orthogonalement cette sphère.*

2. Une surface anallagmatique peut être définie comme le lieu des points associés par rapport à une sphère S des divers plans qui touchent une surface du second degré A.

L'intersection de la surface A et de la sphère S est d'ailleurs une des focales de la surface. A chaque point de l'anallagmatique est associé un plan qui touche la surface A en un certain point correspondant au premier; à toute courbe tracée sur l'anallagmatique correspondra une certaine courbe formée par les points de contact avec la surface A des divers plans associés aux points de la courbe tracée sur l'anallagmatique.

Des deux lemmes que j'ai donnés ci-dessus, on déduit immédiatement les deux propositions suivantes:

La normale en un point M d'une anallagmatique est la droite qui joint ce point au point correspondant sur la surface A.

Etant donnés une courbe C tracée sur l'anallagmatique et un point M de cette courbe, si l'on désigne par c *la courbe correspondante tracée sur la surface du second degré A et par* m *le point de cette courbe qui correspond au point M, le plan normal en M à la courbe C est le plan qui passe par ce point et par la tangente conjuguée de la tangente menée en* m *à la courbe* c.

3. Pour faire une application de ces propositions très-simples je démontrerai brièvement le beau théorème donné par M. Moutard sur l'orthogonalité des surfaces anallagmatiques homofocales.

Les surfaces d'un système homofocal peuvent être engendrées au moyen d'une sphère fixe S et des diverses surfaces du second ordre passant par une anallagmatique sphérique K située sur cette sphère.

Cherchons les surfaces d'un tel système qui passent par un point de l'espace M. Pour cela, menons par ce point un cône isotrope, il coupera la sphère suivant un cercle C, dont le plan P sera le plan associé au point M. Le problème est évidemment ramené à mener par la courbe K une surface du second degré tangente au plan P. Or ce plan devant être tangent à la surface cherchée, doit la couper suivant deux droites renfermant nécessairement les quatre points d'intersection de la courbe K avec le cercle C. On aura donc trois solutions, et les trois points de contact correspondant à ces trois solutions seront les trois points de concours des diagonales du quadrilatère formé par les quatre points d'intersection dont

je viens de parler. En désignant par p, q, r ces trois points d'intersection, il résulte de la première proposition établie au § 2 que les normales aux trois surfaces homofocales passant par le point M sont les droites Mp, Mq, Mr. Mais les trois points p, q, r sont les sommets d'un triangle conjugué par rapport au cercle C; les droites Mp, Mq, Mr forment donc un trièdre conjugué par rapport au cône ayant pour base C et pour sommet le point M, c'est-à-dire par rapport à un cône isotrope, donc elles forment un trièdre trirectangle.

4. Sur une surface anallagmatique, il existe dix systèmes de sections circulaires qui ont été découverts par M. Moutard. Leur existence résulte très-simplement de la définition donnée au § 2. Que l'on imagine en effet un plan se mouvant tangentiellement à la surface A, de façon que son point de contact décrive une génératrice g de cette surface ; pendant ce mouvement le plan tangent tournera autour de cette génératrice; le lieu des points qui lui sont associés par rapport à la sphère S sera donc un cercle coupant orthogonalement cette sphère. A toutes les génératrices de la surface A du même système que g, correspondra un système de sections circulaires de l'anallagmatique ; un autre système de sections circulaires correspondra au second système de génératrices rectilignes de la surface A.

Comme l'anallagmatique est susceptible de cinq modes de génération différentes, l'on voit que l'on obtiendra ainsi cinq groupes de sections circulaires, chaque groupe comprenant deux systèmes distincts.

Deux cercles d'un même groupe et de même système ne se rencontrent jamais.

Deux cercles d'un même groupe et de systèmes différents se coupent en deux points et sont par conséquent situés sur une même sphère.

Deux cercles de groupes différents se coupent toujours en un point.

Les sections circulaires d'une anallagmatique jouissent d'un grand nombre de propriétés analogues à celles des génératrices rectilignes des surfaces du second ordre ; je me contenterai ici de mentionner la suivante, semblable de tous

points à une propriété fondamentale des surfaces du second ordre donnée par M. Chasles :

Etant donnés quatre cercles quelconques d'un même groupe et un cercle variable C d'un autre groupe rencontrant les quatre cercles fixes aux points a, b, c *et* d *; si l'on mène par le cercle variable C les sphères qui touchent la surface aux points* a, b, c *et* d, *le rapport anharmonique de ces quatre sphères est constant.*

5. Pour plus de clarté, je désignerai par S_0, S_1, S_2, S_3 et S_4 les cinq sphères au moyen desquelles on peut engendrer la surface et par A_0, A_1, A_2. A_3 et A_4 les cinq surfaces du second degré homofocales qui leur correspondent; pour indiquer le mode de génération relatif à la sphère S^i et la surface A_i, j'emploierai simplement l'expression de génération (S_i).

Cela posé, j'ai montré au § 2 qu'à chaque courbe tracée sur une anallagmatique correspondait une courbe tracée sur la surface du second degré qui sert à engendrer la surface.

Il est utile, dans un certain nombre de questions, de connaître les courbes qui, dans un mode de génération donné, par exemple (S_0), correspondent aux diverses sections circulaires de la surface.

Relativement au groupe qui appartient proprement à la génération (S_0), il est clair, d'après ce qui précède, que les sections de ce groupe sont représentées par les génératrices rectilignes de la surface A_0.

Pour obtenir la représentation des autres groupes, imaginons que nous circonscrivions à la sphère S_0 et à la surface A_0 une surface développable; cette surface a pour lignes doubles quatre coniques, qui, dans un théorème connu (*), seront situés sur les quatre surfaces A_1, A_2, A_3 et A_4. Je désignerai ces quatre coniques par la notation C^o_1, C^o_2, C^o_3, C^o_4; les indices inférieurs indiquant celle des surfaces A sur laquelle chacune des coniques est située.

Si maintenant de chacun des points de la conique C^o_1, on mène des cônes circonscrits à A_0, les diverses courbes de contact sur cette surface seront les courbes correspondant aux sections circulaires du groupe appartenant proprement à la génération (S_1) ; les coniques C^o_2, C^o_3 et C^o_4 fourniront de même les courbes correspondant aux sections circulaires

des groupes appartenant aux générations (S_2), (S_3) et (S_4).

On obtiendrait d'un façon analogue les coniques qui, sur les surfaces A_1, A_2, A_3 et A_4, correspondent aux différents groupes de sections circulaires.

L'on est amené ainsi à considérer 16 coniques analogues à celles que j'ai définies plus haut comme lignes doubles de la surface développable circonscrite à S_0 et à A_0.

Avec ces quatre dernières, elles forment un système de 20 coniques qui sont distribuées quatre par quatre sur les cinq surfaces A. Le tétraèdre formé par les plans de quatre d'entre elles situées sur une même surface est un tétraèdre conjugué par rapport à cette surface.

Sur le déplacement d'une figure de forme invariable. Nouvelle méthode de normales; applications diverses, par M. Mannheim.

Mon mémoire est divisé en deux chapitres qui sont eux-mêmes partagés en paragraphes.

Le paragraphe 1 du chapitre Ier est intitulé : *Introduction.* Je considère successivement les éléments simples de toute figure : un point, une droite, un plan pour rechercher, si l'on peut amener ces éléments d'une position à une position infiniment voisine, soit par une translation, soit par une rotation. Je trouve que déjà, pour une droite, un déplacement dans de pareilles conditions n'est pas toujours possible. On ne peut pas toujours amener une droite de sa position dans une position infiniment voisine par une simple rotation ; *la droite jouit alors de la propriété d'être normale aux trajectoires de ses points.*

La considération d'une droite qui se déplace ainsi est très-utile. La propriété dont elle jouit alors permet d'arriver à deux théorèmes importants qui portent dans mon mémoire les numéros 4 et 6.

Théorème 4. *Pendant le déplacement le plus général d'un*

plan, les droites de ce plan, normales aux trajectoires de leurs points, passent par un même point.

Si l'on considère simplement le déplacement d'une figure plane sur son plan, ce théorème conduit à la méthode des normales de M. Chasles.

Th. 6. *A un instant quelconque du déplacement d'une figure de forme invariable, si on considère parmi toutes les normales aux trajectoires des points entraînés celles qui rencontrent une droite D, toutes ces normales rencontrent en outre une deuxième droite* Δ.

Ce théorème renferme comme cas particulier le théorème 4, il conduit dans l'espace à une méthode de normales qui fait l'objet principal de mon mémoire.

Pour exposer cette méthode des normales dans le cas du déplacement le plus général d'une figure de forme invariable, il est nécessaire de connaître certaines propriétés de ce déplacement. C'est l'exposition de ces propriétés qui fait l'objet du paragraphe 2.

Ce paragraphe 2 est intitulé :

Propriétés géométriques du déplacement infiniment petit d'une figure de forme invariable.

Je démontre dans ce paragraphe quelques-unes des propriétés énoncées dans le mémoire de M. Chasles intitulé :

Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre.

Je commence par ces deux théorèmes :

Th. 7. *Toute droite d'un plan mobile engendre une surface dont la normale, contenue dans ce plan, passe par le foyer de ce plan.*

Th. 8. *Lorsqu'un plan mobile passe successivement par les différentes génératrices d'une surface réglée, sa caractéristique, à un instant quelconque, passe par le point où il touche cette surface.*

J'emploie ensuite la considération des *droites conjuguées* pour démontrer *que tout déplacement infiniment petit est hélicoïdal.*

Après la démonstration de cette propriété, j'introduis la notion de l'adjointe à un plan.

L'adjointe à un plan est la conjuguée de la droite qui est

à l'infini sur ce plan. Elle passe par le foyer de ce plan, elle est parallèle à l'axe du déplacement.

En employant cette droite, on peut énoncer ce théorème :

Th. 14. *La caractéristique d'un plan* (P) *est la projection de la droite adjointe à un plan perpendiculaire à* (*P*).

Puis alors, on déduit de là ces propriétés :

Th. 15. *Le plan perpendiculaire au plan* (*P*) *mené suivant la caractéristique de ce plan est parallèle à l'axe du déplacement.*

Th. 16. *Lorsque des plans sont parallèles à une même droite R, les plans normaux à chacun d'eux, menés respectivement par leurs caractéristiques, passent par une même droite L. Cette droite est adjointe au plan perpendiculaire R.*

Cette propriété est très-utile, comme je le montre à la fin de mon mémoire en examinant les constructions du plan tangent et de la courbe d'ombre sur un hélicoïde réglé.

Le théorème 19 : *une droite engendre une surface développable lorsqu'elle rencontre un plan qui lui est perpendiculaire,* est aussi très-utile, pour démontrer quelques-unes des propriétés relatives aux droites conjuguées.

Enfin, je termine ce paragraphe en recherchant, pour un déplacement infiniment petit, l'expression de l'angle qu'une droite fait avec sa position infiniment voisine, de même pour un plan.

Le paragraphe 3 est intitulé :

Il faut cinq conditions pour déterminer le déplacement d'une figure de forme invariable.

Pour arriver à ce résultat, je reprends successivement comme dans l'introduction : un point, une droite, un plan. Mon point de départ est toujours le nombre qui assure l'immobilité de la figure. Ainsi je dis :

Th. 32. *Cinq conditions fixent les positions de tous les points d'une droite et assurent leur immobilité.*

Après avoir considéré une droite, je prends une figure plane et j'arrive à ce résultat :

Th. 38. *Cinq conditions déterminent le déplacement d'une figure plane dans l'espace;* qui entraîne le suivant :

Th. 39. *Il faut cinq conditions pour déterminer le déplacement d'une figure de forme invariable. Chaque point de la figure décrit une trajectoire.*

Si l'on n'a que quatre conditions, chaque point peut alors se déplacer dans une infinité de directions à partir de sa position initiale. Je désigne sous le nom de *surface trajectoire* la surface qui contient les éléments de toutes les trajectoires qu'un point peut ainsi décrire à partir de sa position initiale.

En employant cette expression, on a l'énoncé suivant :

Th. 40. *Quatre conditions permettent le déplacement de la figure d'une infinité de manières, chaque point de la figure se déplace, en général, sur une surface trajectoire.*

Je dis, *en général,* parce que je fais voir plus loin qu'il existe alors une infinité de points qui décrivent nécessairement les mêmes lignes, quel que soit le déplacement de la figure compatible avec les données.

On arrive à ce résultat en considérant les conditions que j'appelle *complémentaires.* Les conditions complémentaires sont celles qu'il faut ajouter pour obtenir l'immobilité de la figure qui se déplace. Je montre que, pour une figure mobile assujettie à 3 ou 4 conditions, le nombre des conditions complémentaires n'est pas le même pour tous les points de cette figure.

Le paragraphe 4 est intitulé : *Réduction du problème au cas où l'on a cinq points assujettis à rester sur cinq surfaces données.*

Les conditions auxquelles une figure peut être assujettie sont très-diverses; je considère les conditions descriptives suivantes :

Une surface de la figure mobile est assujettie pendant le le déplacement, soit à contenir un point fixe, soit à toucher une courbe, soit à toucher une surface; ou une courbe de la figure mobile est assujettie à rencontrer une courbe ou à toucher une surface. Je montre qu'à chacune de ces conditions on peut substituer la condition unique : un point doit se déplacer sur une surface. Ainsi, par exemple, si une courbe L doit toujours rencontrer une courbe M, à un instant quelconque, on substituera à cette condition la condition pour le point de rencontre l de L et de M de se déplacer sur le plan déterminé par les tangentes en l aux courbes L et M.

Le paragraphe 5 est consacré à l'exposition de la *méthode*

des normales. Voici comment j'énonce le 1er problème résolu au commencement de ce paragraphe.

Cinq points d'une figure de forme invariable sont assujettis à se déplacer sur cinq surfaces données;

Construire *1° Le plan normal à la trajectoire d'un point quelconque de la figure mobile;*

2° La normale en un point arbitraire de la surface engendrée par une courbe quelconque;

3° La ligne suivant laquelle une surface entraînée touche son enveloppe;

4° L'axe du déplacement de la figure mobile;

5° Le pas réduit des hélices infiniment petites décrites à un instant quelconque.

La solution de ce problème entraîne la solution générale, quelles que soient les conditions du déplacement de la figure mobile. On peut, par exemple, considérer *le déplacement d'un ellipsoïde assujetti à se déplacer en restant tangent à cinq ellipsoïdes donnés.* Puisque l'ellipsoïde mobile est assujetti à cinq conditions, les points invariablement liés n'ont que des lignes trajectoires. Cherchons le plan normal relatif à un point quelconque i entraîné.

Appelons (A), (B), (C), (E), (K), les ellipsoïdes fixes, a, b, c, e, k les points de contact à un instant quelconque de ces ellipsoïdes et de l'ellipsoïde mobile ; enfin, A, B, C, E, K les normales de ces ellipsoïdes issues des points a, b, c, e, k. On prend les quatre normales A, B, C, E et l'on construit le couple des droites D, Δ qui les rencontrent. Du point i, on mène I qui rencontre D et Δ, on fait la même construction en employant quatre autres normales telles que A, B, C, K ; on obtient une droite I'. Les droites I et I' déterminent le plan normal relatif à (i).

Dans l'énoncé du 1er problème, il n'entre que des conditions simples. J'indique ce que devient la solution de ce problème lorsque l'on a un point assujetti à parcourir une courbe, ou un plan assujetti à rester tangent à une développable ; ces conditions sont doubles.

Le 2e problème général dont je donne la solution est énoncé ainsi :

Quatre points d'une figure de forme invariable sont assujettis à se déplacer sur quatre surfaces données;

Construire à un instant quelconque 1° la normale à la surface trajectoire relative à un point entraîné;

2° Le point où une surface entraînée touche la surface lieu de ses intersections successives.

La solution de la 1re partie de ce problème m'a conduit à ces deux résultats importants :

Th. 44. *Lorsque une figure de forme invariable se déplace en restant assujettie à quatre conditions, à un instant quelconque, les normales issues de tous les points entraînés, aux surfaces trajectoires de ces points, rencontrent les deux mêmes droites.*

Th. 45. *Lorsqu'une figure de forme invariable est assujettie pendant son déplacement à quatre conditions, à un instant quelconque, on peut déplacer tous les points entraînés d'une infinité de manières; les trajectoires de ces points appartiennent à des surfaces trajectoires, excepté pour les points de deux droites particulières qui décrivent toujours nécessairement les mêmes éléments de lignes.*

Comme exemple, je considère une droite entraînée pendant le déplacement d'une figure assujettie à quatre conditions.

Je démontre, théorème 46, *que, à un instant quelconque, les normales issues de tous les points de la droite mobile aux surfaces trajectoires de ces points, appartiennent à un hyperboloïde.*

Th. 47. *Cet hyperboloïde est le lieu des conjuguées de la droite mobile pour les divers déplacements qu'on peut faire subir à cette droite.*

Je fais voir que, *pour deux déplacements particuliers, une droite ainsi entraînée engendre des éléments de surface développable.*

J'arrive à ce résultat de deux manières, en considérant les conjuguées de la droite mobile ou les adjointes au plan qui lui est perpendiculaire.

Je termine ce qui est relatif au 2e problème général en donnant pour exemple le cas suivant où l'on a des conditions doubles :

La figure mobile est assujettie à avoir deux de ses points sur deux courbes données.

Enfin je termine ce paragraphe en considérant une figure simplement assujettie à trois conditions.

On a alors le théorème suivant :

Th. 49. *Lorsqu'une figure de forme invariable est assujettie pendant son déplacement à trois conditions distinctes, à un instant quelconque, on peut diriger arbitrairement un point quelconque lié à la figure mobile, à l'exception de tous les points d'un certain hyperboloïde qui admettent des surfaces trajectoires.*

Lorsque les conditions du déplacement ne sont pas distinctes, l'hyperboloïde de l'énoncé précédent peut se décomposer en deux plans. Je considère la podaire d'une surface comme exemple qui présente cette circonstance.

Le chapitre 2 est consacré aux applications de ma méthode aux normales. Il est partagé, comme le premier chapitre, en plusieurs paragraphes.

Le § 1 est intitulé : *Sur le déplacement d'une droite. Applications aux surfaces réglées.*

J'arrive dans ce paragraphe à la solution d'un grand nombre de questions nouvelles.

Je citerai par exemple :

Une droite G se déplace en restant tangente à trois surfaces données (A), (C), (E) : construire le plan normal à la courbe de contact (a) de (A) et de la surface (G), engendré par G.

Une droite G est osculatrice à une surface (A) aux différents points d'une courbe (a) tracée sur cette surface ; construire en un point quelconque de G la normale à la surface engendrée par cette droite.

Pour la solution de ces questions, j'emploie constammen les surfaces lieu de normales ; afin de faciliter le langage, je désigne ces surfaces sous le nom de *normalie.*

Dans ce paragraphe, j'ai fait usage des propriétés des droites conjuguées. On ne peut plus recourir à la droite conjuguée d'une droite mobile, lorsque celle-ci est normale à la trajectoire donnée d'un de ses points. On arrive facilement alors à une solution par la considération de l'adjointe au plan perpendiculaire à la droite mobile. On peut du reste employer cette adjointe pour la solution de quelques-uns des

problèmes traités dans ce paragraphe ; c'est ce que je fais voir au commencement du paragraphe 2.

Le § 2 est intitulé : *Sur le déplacement d'un dièdre.*

Je considère la surface engendrée par l'arête du dièdre mobile, et j'arrive à la solution de quelques questions. Entre autres :

Construire la normale en un point d'une droite mobile à la surface engendrée par cette droite assujettie à rester tangente à une surface donnée et à rester, pendant son déplacement, osculatrice à une autre surface donnée.

Je trouve, comme application de la considération du déplacement d'un dièdre, la démonstration de ces propriétés :

Th. 52. *Si deux surfaces* (*A*), (*B*), *paraissent se couper à angle droit de n'importe quel point de l'espace, elles constituent le lieu des centres de courbure principaux d'une infinité de surfaces parallèles entre elles.*

Th. 53. *Si deux surfaces se coupent constamment sous le même angle, les plans, menés normalement à ces surfaces respectivement par les tangentes conjuguées à la droite G tangente à leur ligne d'intersection, et le plan normal au plan osculateur de cette courbe mené par G, se coupent suivant une même droite.*

Le paragraphe 3 est intitulé : *Sur le déplacement de quelques trièdres particuliers.*

Le premier trièdre que je considère est celui qui a pour arêtes la normale, la tangente et la binormale issues d'un point d'une courbe gauche donnée, et qui se déplace en conservant par rapport à cette courbe la même relation de position. Je montre que le foyer du plan osculateur de la courbe gauche n'est autre que le centre de courbure de cette ligne. Je trouve que la droite rectifiante de Lancret, est parallèle à l'axe de déplacement du trièdre.

Je considère un deuxième triède tri-rectangle dont l'une des arêtes est normale à une surface; j'arrive ainsi à certaines propriétés des normalies.

Th. 56. *Le contour apparent d'une normalie sur un plan contenant une tangente à sa courbe directrice est une courbe tangente à la développée de la section que ce plan détermine dans la surface sur laquelle est tracée la courbe directrice de la normalie.*

Le paragraphe 4 est intitulé : *Sur le déplacement d'une surface assujettie à des conditions multiples.*

La surface mobile est d'abord assujettie à avoir cinq de ses points sur cinq surfaces données.

Je suppose ensuite que les surfaces données viennent successivement se confondre ainsi que les points donnés qui appartiennent à la surface mobile. Je rencontre ainsi des conditions de déplacement dont l'examen direct présenterait quelques difficultés. La solution générale est toujours applicable dans ces cas particuliers.

En voici un :

Une surface mobile est assujettie à se déplacer de façon que deux courbes, J et J_1, qu'elle contient soient constamment osculatrices en leur point de rencontre à une surface fixe donnée : construire deux couples de droites conjuguées.

La connaissance de deux couples de droites conjuguées suffit pour la solution des questions qu'on peut se proposer relativement aux normales, aux lignes ou surfaces décrites. C'est ainsi qu'à l'aide de ces deux droites, on pourra déterminer la tangente en un point de la ligne décrite sur la surface fixe par le point de rencontre des courbes J et J_1.

Comme cas particulier de ce problème, on a le suivant :

Un angle de grandeur constante se déplace de façon que ses côtés soient osculateurs, en leur point de rencontre, à une surface fixe; construire la tangente en un point de la ligne décrite par le sommet de cet angle.

J'ai été conduit à dire un mot des *lignes tracées sur les surfaces et qui jouissent de la propriété qu'en chacun de leurs points on peut mener une droite surosculant la surface.* La solution générale montre que, pour l'étude de ces lignes, il est nécessaire de connaître les lignes analogues que l'on peut tracer sur une surface réglée.

Dans ce paragraphe, j'ai eu l'occasion de retrouver un théorème de Sturm sur les normales infiniment voisines autour d'un point sur une surface.

Ce théorème que j'énonce ainsi : *Les normalies à la surface (A) qui contiennent une normale A sont tangentes entre elles aux centres de courbure principaux de (A) situés sur A; les plans tangents communs en ces points sont les plans des sections principales de (A) menées par la normale A*, n'est

qu'un cas particulier de cet autre théorème que je rencontre dans ce même paragraphe :

Th. 58. *Les normales à* (A), *qui ont pour directrices des courbes tangentes entre elles, admettent les mêmes droites osculatrices dans les plans des sections principales de* A ; *en d'autres termes, elles sont osculatrices aux centres de courbure principaux.*

M Bonnet, qui m'avait signalé ce théorème, l'a généralisé en considérant des directrices ayant entre elles un contact de l'ordre n.

Le dernier paragraphe, intitulé : *Sur l'hélicoïde réglé,* a pour objet de montrer comment les propriétés démontrées dans le paragraphe 3, et qui sont relatives à un déplacement infiniment petit d'une figure de forme invariable, conduisent aux constructions connues qui servent à déterminer le plan tangent en un point d'un hélicoïde réglé et la courbe d'ombre sur cette surface supposée éclairée par des rayons lumineux parallèles.

En résumé, mon mémoire renferme la solution complète du problème des normales dans le cas le plus général du déplacement d'une figure de forme invariable. Les applications que j'ai faites de la solution de cette question, montrent l'usage qu'on peut faire des propriétés relatives au déplacement dans la théorie générale des surfaces.

A l'occasion d'un rapport sur les inondations émané du ministère des travaux publics, M. Dausse a fait à la Société, dans la séance du 30 décembre 1867, la communication suivante :

L'idée d'empêcher les débordements par des digues n'a pu manquer de suivre de près la culture des vallées. Simples bourrelets d'abord, mais exhaussés et renforcés chaque fois qu'ils étaient surpassés, ils sont devenus à la fin nos énormes levées actuelles.

Quand une crue débordante tardait longtemps à venir, ce qui arrivait parfois, surtout avant le déboisement des mon-

tagnes, le préservatif dont il s'agit semblait excellent, et volontiers on le tenait pour tel ; autrement on se hâtait de le rendre une bonne fois suffisant, pensait-on, et l'on se rendormait aussitôt. On ne se souciait même aucunement de l'effet produit par le resserrement des crues, lequel va pourtant aujourd'hui, en plus d'un lieu, jusqu'à doubler leur hauteur première. Enfin, ce n'est qu'en 1856 qu'a été proclamé ce principe aussi simple que méconnu : *Il n'y a pas de limite assignable aux grandes crues de nos rivières.* Le fait est que les digues, toujours surpassées et culbutées, ont néanmoins toujours été dites *insubmersibles*, qualification tellement à l'ordre du jour qu'en révéler la folie ç'a été se perdre. Si les digues sont toujours surpassées, a dit l'Empereur dans une lettre célèbre, c'est qu'on ne retient pas sur les montagnes les averses qui causent les pluies diluviennes. La science ayant naguère dérobé la foudre au ciel, elle peut bien dompter la pluie. L'argument a cours depuis Babel.

Or, c'est pourquoi précisément on vient de perdre dix années précieuses ; c'est pourquoi précisément la crue de 1866, plus forte encore que celle de 1856, a pris nos vallées au dépourvu tout comme sa devancière. Mais il est juste et il importe de noter que ce malheur eut été évité, si l'administration n'eût pas étouffé au berceau la *Haute commission des rivières* que l'Empereur nous a promise et à laquelle, Lui, dans sa sagesse, il voulait soumettre sa propre idée. Grave preuve de plus que le huis clos est fatal en toute chose.

Car, avec la Haute commision des rivières, formée de toutes les capacités du pays en l'espèce, loyalement, libéralement convoquées, — riverains, ingénieurs, académiciens, députés, sénateurs, — c'en était fait sans retour de la trompeuse épithète et de la routine intéressée qui la maintient. De la lutte à outrance contre l'ordre naturel et son incessante et invincible puissance, on revenait à une juste soumission aux lois immuables, que la vraie science se contente de mettre à profit. Et au lieu de s'ingénier afin d'avoir du pays des millions par centaines pour d'innombrables réservoirs, aussi insuffisants et encore plus suspects de leur nature que les digues elles-mêmes, comme tant de néfastes exemples anciens et récents ne l'ont que trop prouvé; au

lieu de demander d'abord six millions rien que pour relever les digues de la Loire, de l'Allier et du Cher, culbutées par la dernière inondation, on eût proposé au contraire d'abaisser ces digues à la faible hauteur des crues ordinaires et fréquentes, laissant les autres librement exhausser les plaines et les féconder de leurs riches limons, et rétablir ainsi entre ces plaines et le lit des fleuves le rapport de hauteur sans lequel ceux-ci, violentés, tôt ou tard se font justice et avec gros intérêts pour le sursis. Qui ne sait d'ailleurs, pour citer un exemple décisif entre mille, que les ségoneaux du Rhône, c'est-à-dire les terres comprises entre le fleuve et les digues, valent deux fois plus aujourd'hui que les terres abritées par ces digues et *refroidies* à ce point qu'une partie, qui s'étend de plus en plus, est devenue marécageuse et infecte.

Qu'on empêche la mobilité du cours des fleuves en armant leurs berges d'un revêtement convenable, là où il le faut; qu'on empêche l'inondation quand elle vient de courir sur les plaines, au moyen surtout de simples haies le long des chemins transversaux aboutissant aux ponts et aux bacs, et puis qu'on encourage les riverains à se cotiser pour faire face, par une sage assurance, aux pertes éventuelles de récoltes, et l'on aura le système de commun bon sens auquel il faut, selon moi, se résigner désormais. Les grands désastres ne viennent que des digues démesurées, au moment de leur rupture : or, il n'y aura pour ainsi dire plus de digues.

Ce système n'exclut ni quelques grands réservoirs lorsqu'ils sont indiqués, offerts par la nature; ni l'épanchement dans certains vals, surtout comme essai et transition, la vigilance des hommes et tout leur art étant médiocrement rassurants. Mais ce qu'il requiert, non point comme ces palliatifs plus ou moins exceptionnels, bornés et chanceux; ce qu'il requiert comme complétement essentiel et capital, c'est le reboisement des montagnes, exigeant lui-même le barrage des ravins sillonnant ces montagnes. Car les bois sont le modérateur naturel des crues; ils suffisent d'ordinaire à empêcher l'inondation des plaines; en outre, en fixant le sol des montagnes, ils empêchent l'encombrement des plaines par le charriage des torrents; enfin, en clarifiant ces torrents et les cours d'eau qui les reçoivent, ils les rendent tous moins instables et plus maniables, procurant même, au lieu de

l'exhaussemeut de leurs lits qui suit toujours le déboisement, un creusement proportionnel à l'épuration dont il s'agit.

Je renvoie à la brochure pour les détails et je conclus que, en toute chose, il faut avoir des principes et une doctrine, justifiables et avoués, et les suivre fermement et franchement; non point avec engouement ni roideur, mais avec intelligence et avec suite, avec à-propos et sans jamais perdre une occasion; ce qui exige qu'on soumette toujours sans délai leur application à la libre et publique discussion des intéressés, parce que eux seuls savent tout ce dont il faut tenir compte pour ne pas aller à l'aventure et que sans leur aiguillon on s'endort. A ces conditions seulement, au lieu des désastres qui se répètent à notre époque, il n'y aura plus pour tous qu'honneur et prospérité; les dépositaires du pouvoir seront en tout cas sans reproche devant Dieu et devant les hommes.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.— A. CHAIX ET Cᵉ, RUE BERGÈRE, 20.—4742-8.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS.

Séance du 4 avril 1868.

PRÉSIDENCE DE M. TRANSON.

M. Fernet expose le résultat de ses expériences sur un appareil destiné à régulariser la lumière électrique.

M. Haton développe un théorème sur le tantochronisme des épicycloïdes quand on a égard au frottement.

M. Laguerre fait une communication sur la méthode de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Sur le tantochronisme des épicycloïdes, par M. Haton de la Goupillière.

M. Haton de la Goupillière fait connaître des théorèmes relatifs à l'isochronisme des épicycloïdes.

On sait depuis Newton que ces courbes sont tantochrones pour des forces d'attraction et de répulsion exercées par le centre en raison de la distance. M. Haton ajoute à ce résultat les propositions suivantes.

1. Le tantochronisme subsiste encore lorsqu'on a égard au

frottement. Le point d'isochronisme est alors celui dont le rayon vecteur forme avec la normale l'angle de frottement.

2. Ce tantochronisme n'est pas troublé par l'adjonction d'une résistance proportionnelle à la vitesse.

3. L'ensemble de ces trois influences et du mouvement épicycloïdal constitue le cas le plus général qui soit renfermé dans la formule de Lagrange pour le tantochronisme, lorsqu'au frottement et à l'action proportionnelle à la distance on adjoint une résistance qui procède suivant une fonction *indéterminée* de la vitesse.

4. Ajoutons enfin que cet isochronisme a encore lieu en sens inverse pour diverses impulsions initiales communiquées au mobile à partir du point en question.

Séance du 18 avril 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. Laguerre présente ses observations sur les courbes gauches résultant de l'intersection de deux surfaces de second ordre.

M. Frémineau fait connaître un nouveau mode d'éclairage applicable à l'examen microscopique des Diatomées.

M. Horwart rend compte de ses expériences sur l'écoulement des corps solides.

Sur les courbes gauches résultant de l'intersection de deux surfaces du second ordre, par M. Laguerre.

1. On sait que les courbes gauches du quatrième ordre sont de deux espèces différentes; par les unes, on ne peut faire passer qu'une seule surface du second ordre; par les

autres, on en peut faire passer une infinité et elles peuvent être définies comme l'intersection de deux de ces surfaces. Je ne m'occuperai ici que de ces dernières, et, pour abréger le discours, je les désignerai sous le nom de *biquadratiques* gauches, ou simplement de *biquadratiques* lorsqu'il n'y aura lieu de craindre aucune ambiguité.

Par toute biquadratique gauche, l'on peut faire passer quatre cônes dont les sommets forment un tétraèdre T conjugué par rapport aux diverses surfaces du second ordre que l'on peut faire passer par la courbe. Considérons deux arêtes opposées de ce tétraèdre; il est facile de voir que toute droite, qui rencontre la courbe en un point m et s'appuie en même temps sur les deux arêtes considérées du tétraèdre, rencontre la courbe en un second point m'. Je dirai que les points m et m' sont conjugués, et j'appellerai simplement *corde* la droite qui joint deux points conjugués (*). Les diverses cordes de la courbe forment une surface réglée du quatrième ordre ayant pour lignes doubles les deux arêtes du tétraèdre; je désignerai cette surface par la lettre R.

Comme, dans le tétraèdre T, il existe trois couples d'arêtes opposées, l'on voit que l'on peut grouper les points de la courbe de trois façons différentes; on obtiendra ainsi trois systèmes de cordes formant trois surfaces réglées du quatrième ordre, la surface R et deux surfaces analogues que j'appellerai R_1 et R_2. Je désignerai simplement les modes de groupement qui correspondent à ces trois surfaces par la notation (R), (R_1) et (R_2).

A chaque point de la courbe ne correspond, dans un mode de groupement donné, qu'un seul point conjugué; mais, en tout, il lui correspond trois points dont chacun lui est conjugué dans un des trois modes de groupement que j'ai définis plus haut.

Ces définitions permettent d'établir facilement les propositions suivantes :

2. Étant donnée une droite quelconque rencontrant en deux points une biquadratique gauche, on peut mener par

---

(*) Voir ma communication du 14 mars 1868 à la Société philomathique.

cette droite quatre plans tangents à la courbe. Chacun des points de contact a pour points conjugués les trois autres points de contact, en sorte que, si l'on joint le premier point aux trois autres, on obtient les trois cordes, correspondant aux trois modes de groupement, qui passent par ce premier point. Chacune de ces droites s'appuie donc sur deux arêtes opposées du tétraèdre T. La droite joignant deux points de contact pris arbitrairement et la droite joignant les deux autres points sont deux cordes du même système, en sorte qu'elles rencontrent les deux mêmes arêtes opposées du tétraèdre.

3. *Si* a, a′ *et* b, b′ *désignent deux couples quelconques de points conjugés, les droites* a,b *et* a′,b′ *sont les génératrices d'une même surface du second ordre passant par la courbe.*

4. *Si par une droite quelconque rencontrant la courbe en deux points et par trois couples quelconques de points conjugués, l'on mène des plans, les plans ainsi obtenus forment un faisceau en involution.*

En particulier,

Si par une tangente quelconque à la courbe et par trois couples quelconques de points conjugués l'on mène des plans, les plans ainsi obtenus forment un faisceau en involution.

M. Chasles a donné un théorème analogue, relatif aux cubiques gauches (*Comptes Rendus*, 10 août 1857, § 22).

5. Soit a et b un couple quelconque de points conjugués d'une biquadratique gauche ; si par la droite $a\ b$ l'on mène les plans tangents à la courbe, les quatre points de contact forment deux couples de points conjugués a', b' et a'', b'' appartenant au même groupe de points conjugués que a et b.

Ces deux couples sont parfaitement déterminés et les droites $a'\ b'$, $a''\ b''$ rencontrent les deux arêtes du tétraèdre T sur lesquelles s'appuie la droite $a\ b$. De ces deux couples, il y en a un, c'est celui que je désignerai par $a'\ b'$, qui jouit de la propriété suivante. Les droites qui joignent chacune des extrémités de la corde $a\ b$ aux deux extrémités de la corde $a'\ b'$, forment un système de quatre droites situées sur une même surface du second ordre passant par la bi-

quadratique. Le couple de points conjugués a'', b'' ne jouit pas de cette propriété.

Je dirai que $a'\,b'$ et $a\,b$ sont deux cordes conjuguées et que $a''\,b''$ et $a\,b$ sont deux cordes associées, ou bien encore, que ces couples de droites sont respectivement des génératrices conjuguées et des génératrices associées de la surface réglée R, lieu des cordes correspondant au mode de groupement que je considère.

Ces définitions établies, on aura les propositions suivantes :

6. Si l'on joint les extrémités de chacune des cordes appartenant à un mode de groupement donné, par exemple au groupement (R), aux extrémités de la corde conjuguée, toutes les droites ainsi obtenues sont les génératrices d'une *seule et même* surface du second ordre, que je désignerai par A. Aux deux autres modes de groupement correspondraient deux autres surfaces du second degré que j'appellerai A_1 et A_2.

Deux cordes conjuguées, appartenant au groupement (R), ou, si l'on veut, deux génératrices conjuguées de la surface réglée R, sont polaires réciproques par rapport à la surface A ; en sorte que la surface R est à elle-même sa polaire réciproque par rapport à la surface A.

Si par un point quelconque de la surface A, on mène les droites qui s'appuient sur les divers couples de génératrices conjuguées de la surface R, toutes les droites ainsi obtenues sont dans un même plan.

7. *Si une droite se meut tangentiellement à la surface A, en s'appuyant constamment sur deux génératrices associées quelconques de la surface R, elle touche la surface A suivant la biquadratique dont cette surface est dérivée.*

Cette propriété résulte immédiatement de la proposition suivante : Toute droite qui touche la surface A en un point de la biquadratique et qui rencontre une génératrice de la surface R rencontre aussi son associée.

Le théorème précédent complète une proposition énoncée par M. Chasles (*Comptes Rendus*, 24 février 1862, § 64), et fournit le moyen d'obtenir effectivement une biquadratique donnée par le mode de génération indiqué ci-dessus.

On voit que par toute biquadratique l'on peut faire passer

trois surfaces du second ordre fournissant une solution du problème, chacune de ces surfaces correspondant à un des trois modes de groupement des points de la courbe, et, au moyen d'une quelconque de ces surfaces, on peut encore engendrer la courbe d'une infinité de façons différentes.

Les surfaces réglées du quatrième ordre et à directrices doubles que j'ai désignées par R, R_1 et R_2 jouissent de propriétés particulières qui méritent d'être signalées.

En général, si l'on considère une surface réglée du quatrième ordre, contenant deux droites doubles D et Δ, l'on voit que par chaque point a de la directrice D passent deux génératrices coupant Δ en deux points; de même, par chaque point b de Δ passent deux génératrices coupant D en deux points. Les génératrices divisent donc les deux directrices de telle sorte qu'à un point de D correspondent deux points de Δ et réciproquement.

La correspondance entre les points des deux droites D et Δ peut être exprimée par une relation à trois termes de la façon suivante. Il existe en général, sur la droite D, quatre points tels que le couple de points correspondant à chacun d'eux sur la droite Δ se confond en un seul point; désignons par α, α' et α'' trois quelconques de ces points. De même il existe sur la droite Δ quatre points tels que le couple de points correspondant sur la droite D se confonde en un seul point; désignons par β, β' et β'' trois quelconques de ces points.

Cela posé, la relation qui existe entre deux points correspondants a et b situés respectivement sur les droites D et Δ pourra être écrite sous la forme suivante :

$$p\sqrt{a\alpha.b\beta} + q\sqrt{a\alpha'.b\beta'} + r\sqrt{a\alpha''.b\beta''} = 0,$$

relation où p, q et r désignent des quantités numériques constantes.

Dans le cas des surfaces que j'ai étudiées dans cette note, la correspondance entre les points des deux directrices doubles a lieu de telle façon qu'à un couple de points de la droite D correspond un couple de points de la droite Δ;

c'est-à-dire que si, au point a de la droite D, correspondent les deux points b et b' de la droite Δ, à ces deux derniers points correspondront deux mêmes points de la droite D, parmi lesquels se trouvera nécessairement le point a.

M. Chasles a depuis longtemps signalé l'importance de ce mode de correspondance dans son Mémoire *sur la résolution des équations du troisième et du quatrième degré*. Les surfaces à directrices doubles du quatrième ordre, pour lesquelles a lieu ce mode de correspondance, jouent dans l'ensemble des surfaces de la même famille le même rôle que les *cassiniennes* dans l'ensemble des courbes anallagmatiques.

On peut, dans ce cas, exprimer la relation qui existe entre les points correspondants des deux directrices, et cela d'une infinité de façons, par des équations à deux termes; tandis que, dans le cas général, cette relation ne peut pas être exprimée plus simplement que par l'équation à trois termes donnée ci-dessus.

Sur des essais d'éclairage pour l'analyse des stries des Diatomées, par M. Frémineau.

La difficulté que l'on éprouve pour analyser les stries des Diatomées nous a fait répéter d'un côté des expériences que l'on avait laissées dans l'oubli et en entreprendre de nouvelles qui aident énormément ce mode d'exploration.

Le procédé le plus généralement employé consiste à éclairer l'objet à l'aide de la lumière oblique obtenue en plaçant le miroir en arrière du microscope et latéralement en l'inclinant de manière à ce que la lumière réfléchie fasse avec la normale un angle de 45° en frappant sur l'objet.

La difficulté qu'éprouvent les observateurs qui n'ont pas une grande habitude de manier la lumière oblique, souvent la qualité des objectifs, sont deux causes qui empêchent d'arriver à un résultat bien net.

Voici donc différents moyens qui permettent de corriger ces deux causes d'observations incomplètes et de simplifier le maniement de la lumière.

Le premier consiste à faire arriver la lumière solaire directement au travers des navicules, à couvrir l'objectif d'un verre noir pour protéger la rétine. Ce premier mode d'observation donne très-bien toutes les stries.

Le second consiste à avoir recours à la lumière du spectre solaire : on la dirige sur le miroir pour la réfléchir au travers des navicules dans les teintes comprises entre le jaune orangé et le jaune vert.

Le troisième consiste, quel que soit le grossissement, à éclairer les navicules directement comme on éclaire les objets opaques, mais par un procédé différent, le premier n'étant pas applicable.

On place un prisme équilatéral, ou mieux un prisme à faces convexes (prisme condensateur) au niveau de la platine du microscope. On fait passer un faisceau de lumière soit blanche, soit spectrale, entre la préparation et la lentille objective ; alors on voit les stries noires sur un fond irisé en jaune verdâtre.

Ces différents procédés ne demandent point, comme la lumière oblique, une grande habileté dans le maniement et permettent d'avoir l'analyse immédiate et très-nette des stries les plus difficiles à étudier des navicules.

Ces divers procédés nous ont rendu de très-grands services dans d'autres cas que l'exploration des Diatomées et sont applicables à l'examen de toutes les préparations.

Comme on n'a pas toujours le soleil à sa disposition nous avons essayé divers moyens d'en remplacer la lumière pour obtenir le même résultat.

Un grand condensateur en demi-boule que l'on place au devant d'un réflecteur conique; entre ces deux appareils une bonne lampe, et mieux, la lumière du magnésium, la lumière électrique, ou bien la lumière blanche obtenue en mettant au centre de la flamme un cylindre de magnésie concrétée, sont les premiers et les meilleurs moyens d'obtenir les mêmes effets qu'avec la lumière solaire.

Ces divers procédés peuvent assez bien la remplacer.

Quand ces appareils ne peuvent être à la disposition de l'observateur, nous avons cherché à les remplacer par d'autres moyens.

Nous avons fait passer la lumière à travers des liquides

colorés. Après des tâtonnements nombreux, nous avons obtenu à peu de chose près les mêmes effets avec une solution de la matière colorante des graines du *Gardenia grandiflora* et avec la teinture de chlorophylle au moment où elle vire au jaune verdâtre. Le liquide se place entre deux lames parallèles d'un vase plat semblable en petit à l'appareil vertical qui sert à faire virer les photographies.

Séance du 25 avril 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. Gaudry, en offrant à la Société sa carte géologique de l'Attique, donne quelques explications à ce sujet.

Communication de M. Darboux sur un nouveau mode de transformation des figures.

M. Moutard présente des observations sur la même question.

Sur un nouveau mode de transformation des figures, par M. Darboux.

Soient deux points O, O' pris sur une surface du second ordre. Par ces deux points menons deux droites OM, O'M se coupant sur la surface. Il est clair qu'à une droite OM correspondra une droite O'M et une seule, en sorte qu'à un cône ayant le point O pour sommet correspondra un cône ayant le point O' pour sommet, et ces deux cônes couperont la surface du second ordre suivant une même ligne.

Maintenant faisons correspondre au point O un plan fixe P, et au point O' un plan fixe P'. Tout cône ayant son sommet en O sera coupé par le plan P suivant une ligne, et le

cône correspondant ayant son sommet en O' sera coupé par le plan P' suivant une autre ligne. Ces deux lignes situées dans les plans P, P' pourront être considérées comme correspondantes et l'on aura ainsi un mode de transformation des figures planes dans lequel à un point correspondra un seul point.

Pour déterminer la propriété fondamentale de ce mode de déformation, nous remarquerons qu'à une droite dans le plan P correspond une conique dans le plan P' et réciproquement. En effet, par le point O et par la droite faisons passer un plan. Ce plan coupera la surface du second ordre suivant une conique, et le cône ayant son sommet en O' et passant par cette section de la surface coupera le plan P' suivant une conique correspondante à la droite considérée. On a donc la réalisation géométrique du mode de transformation, considéré pour la première fois par Magnus (Crelle, tome IV), dans lequel à un point répond un point, et à une droite répond une conique. M. Transon avait montré que la *projection gauche* d'une figure réalise ce mode de transformation. Enfin M. Hirst l'a étudié au moyen de la théorie des faisceaux homographiques. Le nouveau mode que je propose permet d'obtenir la transformation la plus générale considérée par Magnus, puisqu'il y a neuf constantes dans l'équation d'une surface de second ordre, six dans celle des deux plans, et qu'on peut prendre arbitrairement sur la surface les points O O'.

Si, laissant invariable les autres parties de la figure, on déplace le plan P', toutes les figures obtenues dans les différents plans P' seront les perspectives les unes des autres, puisque ce sont des sections planes de cônes ayant leurs sommets en O'. Nous pouvons donc supposer que le plan P et le plan P' coïncident. On pourra même, si l'on veut, prendre une position particulière du plan P. Les résultats les plus généraux se déduiraient de ceux que nous obtiendrons ainsi en faisant la perspective de l'une ou des deux figures correspondantes.

Soit S le point de rencontre de la droite O O' et du plan P. Un point M de la surface du second ordre donnera deux points a, a' situés sur une droite passant par le point S. Ces deux points coïncideront quand le point M sera

dans le plan, en sorte que le lieu des points qui coïncident avec leurs homologues sera la section de la surface par le plan P. Les points a, a' formeront sur chaque droite S a a' des divisions homographiques, dont les points doubles seront les intersections de la droite et de la conique, que j'appellerai conique principale.

A un point a correspond en général un seul point a', parce que la droite O a ne coupe en général la surface qu'en un point. Mais si la droite O a est située tout entière sur la surface, à un point a correspondent des points a' en ligne droite.

Considérons les plans tangents à la surface en O et O'; ils coupent la surface suivant des droites O α, O β, O' α', O' β'. α β α' β' désignent les points d'intersection de ces droites par le plan P; il est clair que les droites α α', β β' vont passer par le point S.

Au point α considéré comme appartenant à la première figure correspondent tous les points de la droite S α, etc. On peut donc former le tableau suivant :

1re figure		2e figure	2e figure		1re figure
point	α	droite S α'	point	α'	droite S α
	β	S β'		β'	S β
	S	α' β'		S	α β

Donc à toute droite de la première figure correspond une conique passant par les trois points α', β', S et par les deux points d'intersection de la droite et de la conique principale, et réciproquement à toute droite de la seconde figure correspond une conique passant par les trois points α, β, S.

Voici du reste un tableau s'appliquant à toutes les courbes et que nous empruntons à l'article de M. Hirst.

n et n' désignent les ordres des courbes correspondantes, a, b, s, a', b', s' le nombre de fois qu'elles passent la première par les points α, β, S, la seconde par les points α', β', S.

On a

$$a' = n - b - s \qquad a = n' - b' - s'$$
$$b' = n - s - a \qquad b = n' - s' - a'$$
$$s' = n - a - b \qquad s' = n' - a' - b'$$
$$n' = 2n - a - b - s \qquad n = 2n' - a' - b' - s'$$

Comme application, considérons une droite passant par le point α.

On a	$n = 1$	$a = 1$	$b = c = 0$
On trouve	$n' = 1$	$a' = 1$	$b' = c' = 0$

Ainsi à ces droites correspondent des droites passant par le point α', ce qui est évident géométriquement.

Il résulte de là un moyen très-simple de trouver, par des constructions effectuées dans le plan, l'homologue d'un point. Joignons α M. A cette droite correspond une droite passant par le point α', et ces deux droites doivent se couper sur la conique principale en β. On connaîtra donc la droite correspondant à α M et de même celle qui correspond à β M, β q, d'où la construction suivante.

Joignez le point M aux deux points α β. Les droites de jonction coupent la conique principale en deux points qu'on joint respectivement à α' β' par des droites, ces droites se coupent au point M′ homologue de M, et la droite M M′ va passer par le point S.

Construction des tangentes aux points correspondants. Les tangentes aux points M M′ vont couper en un même point la trace p q du plan tangent à la surface. Donc, quand on connaîtra la tangente en M, on en déduira très-facilement la tangente en M′.

Le mode de transformation que nous proposons nous paraît avoir un avantage. On peut se rendre compte sans effort, de tous les cas particuliers que présente la transformation de Magnus.

Veut-on avoir l'inversion quadrique de M. Hirst. On prendra pour P le plan polaire d'un point de O O′. Alors deux points correspondants a' a forment une involution sur a a', et on a l'inversion quadrique telle qu'elle a été proposée par M. Hirst.

Par exemple, si on prend une sphère, deux points O O′ à l'extrémité d'un diamètre, et pour plan P un plan perpendiculaire à O O′, on obtient la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Dans une prochaine communication je donnerai quelques détails sur la transformation précédente, et j'en ferai l'appli-

cation à la construction de la surface du deuxième ordre, déterminée par neuf points.

Séance du 2 mai 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. de la Gournerie, après avoir exposé des considérations sur les involutions du quatrième ordre, donne comme application la résolution de l'équation générale du quatrième degré et quelques propriétés des lignes spiriques.

M. Vaillant présente une sorte de hache provenant de l'Océanie et taillée dans la coquille d'un *Tridacna*.

Séance du 9 mai 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. Delesse, en offrant à la Société son rapport sur l'Exposition universelle, analyse la partie relative aux matériaux de construction.

M. Transon fait une communication sur un moyen géométrique d'obtenir la décomposition des fractions rationnelles.

Séance du 16 mai 1868

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. Transon complète la communication commencée dans la séance précédente et ajoute des considérations sur la représentation des quantités imaginaires.

M. Darboux termine sa communication du 29 avril 1868, sur la construction de la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points.

M. Fouret expose le résultat de ses recherches sur les épicycloïdes.

Sur la construction de la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points, par M. Darboux.

I. Construction de la surface du deuxième ordre passant par une droite (O) et par six points O', a, b, c, M, N.

Nous prenons par les deux pôles de la transformation un point O, situé sur la droite (O) et le point O'; pour plan P de la transformation, nous prenons le plan des trois points a, b, c. La question est donc ramenée à la suivante :

Déterminer les éléments de la transformation connaissant le point α (où la droite (O) rencontre le plan P), trois points a, b, c de la conique principale et deux couples de points correspondants m, m'; n, n'.

Remarquons qu'aux droites $\alpha\, m$, $\alpha\, n$ doivent répondre des droites allant se couper en un point β' de la conique principale. Ces droites doivent d'ailleurs passer par les points m', n'. Il faut donc résoudre le problème suivant :

Mener par quatre points fixes α, a, b, c une conique rencontrant les droites fixes $\alpha\, m$, αn, en des points tels que, si on joint ces deux points donnés aux deux points m', n', les droites de jonction aillent se couper sur la conique.

Ce problème se résout avec une grande facilité de la manière suivante :

Si on considère une des coniques passant par les quatre points fixes et coupant les droites fixes en q, q', la droite n' q ira couper la conique en un point r variable et la droite r q' menée par les deux points mobiles r, q' ira passer par un point fixe.

Ce point fixe se détermine avec la règle : il suffit de prendre, parmi les coniques variables, celles qui se réduisent à des droites. Dès lors la droite q' r, devant passer par ce point fixe et par un autre point fixe m', est complétement déterminée ; le point q' donne un cinquième point de la conique cherchée.

Nous pouvons maintenant considérer le problème comme résolu, puisque nous connaissons la conique principale qui est une section de la surface cherchée, la droite (O) et la droite O' β' appartenant aussi à la surface.

II. Construire la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points quelconques.

On sait que toutes les surfaces passant par huit points se coupent suivant une ligne du quatrième ordre et, par suite, que leurs sections par un plan fixe passent toutes par quatre points de ce plan. Soit en particulier le plan P contenant trois des huit points a, b, c, les sections des surfaces par ce plan se coupent en trois points a, b, c et en un quatrième point qui est inconnu. Notre problème serait résolu si on savait déterminer ce quatrième point ; en effet, si des neuf points donnés on retranche successivement deux points, on aura deux systèmes de huit points qui fourniront dans le plan P deux points x, y. La conique des cinq points a, b, c, x, y appartiendra donc à la surface cherchée et le problème sera résolu. Nous sommes donc ramenés au problème suivant :

Etant donnés huit points, déterminer dans le plan de trois d'entre eux le quatrième point qui appartient à toutes les surfaces du second degré passant par les huits points.

Ce problème peut se résoudre au moyen de celui que nous avons examiné précédemment ; on n'aura qu'à considérer deux surfaces particulières passant par six des huit points et par

la ligne qui joint les deux autres, et on n'a plus qu'a résoudre le problème connu :

Etant données deux coniques déterminées par cinq points, et ayant trois points communs, déterminer leur quatrième point d'intersection ; ce qui se fait avec la règle.

III. On voit, d'après ce qui précède, que le problème de déterminer une transformation du deuxième ordre quand on connaît neuf systèmes de points correspondants revient au suivant : construire la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points. Je terminerai en faisant remarquer que la méthode de transformation employée fournirait plusieurs autres solutions du problème que nous nous étions posé; elle serait surtout précieuse dans le cas où quatre points seraient dans un plan et dans quelques autres cas particuliers.

Sur les épicycloïdes, par M. Fouret.

I

1. Je me propose dans cette note d'exposer quelques propriétés nouvelles des épicycloïdes. La plupart de ces propriétés appartiennent aussi bien aux épicycloïdes allongées ou raccourcies qu'aux épicycloïdes ordinaires, et on en déduit comme cas particuliers quelques théorèmes sur l'ellipse dont la plupart me paraissent nouveaux. Ces théorèmes se démontrent très-aisément par la plus simple géométrie ; c'est pourquoi je me bornerai à les énoncer et à indiquer en peu de mots le principe de la démonstration.

Quoique les propriétés dont il s'agit soient des propriétés géométriques, j'emploierai, pour les énoncer plus commodément, des termes empruntés à la mécanique, et qu'il est inutile de définir ici. Je dirai seulement quelques mots sur la définition des épicycloïdes.

Au lieu de la définition ordinaire de ces courbes, j'ai employé la définition suivante qui, tout en n'étant qu'une

transformation très-simple de la première, se prête beaucoup mieux qu'elle à l'étude actuelle.

2. « Une épicycloïde quelconque (ordinaire, allongée ou » raccourcie) peut être considérée comme engendrée par un » point M parcourant une circonférence (M), tandis que » cette circonférence tourne autour d'un point fixe O, son » centre F décrivant autour de ce point une circonférence (F), » de telle sorte que les angles μ et φ dont tournent simulta- » nément le point M sur la circonférence (M) et le point F » sur la circonférence (F) soient constamment proportion- » nels. »

L'épicycloïde sera extérieure, si les deux rotations s'effectuent dans le même sens ; ce sera d'ailleurs une épicycloïde ordinaire, allongée ou raccourcie, suivant que l'on aura

$$\frac{m}{f} \gtreqless \frac{\varphi}{\mu} + 1$$

m et f étant les rayons des deux circonférences (M) et (F).

Si les deux rotations ont lieu en sens contraire, l'épicycloïde sera intérieure; autrement dit ce sera une hypocycloïde. Cette hypocycloïde sera ordinaire, allongée ou raccourcie suivant que l'on aura

$$\frac{m}{f} \gtreqless \frac{\varphi}{\mu} - 1$$

3. Parmi les épicycloïdes proprement dites on peut citer l'épicycloïde du 4e degré, qui n'est autre chose que le limaçon de Pascal, pour lequel $\frac{\varphi}{\mu} = 1$.

L'hypocycloïde la plus intéressante est l'ellipse pouvant se réduire à un segment de droite ; c'est le cas de $\frac{\varphi}{\mu} = 2$.

Dans ce qui va suivre, nous appellerons épicycloïdes du même genre celles pour lesquelles le rapport $\frac{\varphi}{\mu}$ a la même valeur et le même signe.

Dans le cas de l'ellipse l'angle φ compté à partir du grand axe a reçu le nom d'*angle d'anomalie ;* je me servirai dans ce qui va suivre de cette dénomination en l'étendant au cas d'une épicycloïde quelconque ; seulement l'axe qui sert d'origine à l'angle φ restera indéterminé, ce qui ne peut avoir aucun inconvénient parce que l'angle φ n'intervient que par ses accroissements.

L'angle φ dans le cas du limaçon est l'angle que fait avec l'axe le rayon vecteur issu du pôle, ou autrement dit du point double.

Pour faciliter le langage, j'appelle rayon vecteur d'une épicycloïde la droite joignant le centre de son cercle directeur à un point mobile sur cette courbe.

4. « Une cycloïde quelconque (ordinaire, allongée ou rac-
» courcie) peut être considérée comme engendrée par un
» point M parcourant une circonférence (M) douée d'un
» mouvement de translation rectiligne, le chemin l parcouru
» par le centre de cette circonférence et l'angle dont tourne
» en même temps le point m sur la circonférence étant con-
» stamment proportionnels. »

II

5. *Théorème I.* « Des points en nombre quelconque décri-
» vant sur un plan des épicycloïdes du même genre, de fa-
» çon que les angles d'anomalie croissent simultanément de
» la même quantité, la résultante des droites menées à
» chaque instant par un point fixe du plan parallèles et
» égales aux rayons vecteurs de ces épicycloïdes est le
» rayon vecteur d'une épicycloïde du même genre qu'elles.»

Ce théorème est d'une grande généralité ; les suivants n'en sont que des conséquences presque immédiates.

6. *Théorème II.* « Par un point quelconque on mène dans
» un sens déterminé des droites parallèles et égales aux
» cordes d'une épicycloïde dont les deux extrémités ont des
» angles d'anomalie différant d'une quantité constante ; le
» lieu des extrémités des droites ainsi obtenues est une
» épicycloïde du même genre. »

Ce théorème est évident dans le cas de l'ellipse, lorsque

l'on considère cette courbe comme la projection d'un cercle.

Dans le cas du limaçon, ce théorème prend la forme suivante :

« Par un point quelconque on mène dans un sens déter-
» miné des droites parallèles et égales aux cordes d'un li-
» maçon vues du pôle sous un même angle; le lieu des
» extrémités de ces droites est un limaçon.

7. En remarquant qu'un cercle peut être considéré comme une épicycloïde d'un genre quelconque, on déduit du théorème I les deux théorèmes suivants :

Théorème III. « Par chacun des points d'une épicycloïde
» on mène une droite d'une longueur constante faisant un
» angle constant dans un sens de rotation déterminé avec
» la droite joignant les centres des cercles générateurs de
» l'épicycloïde. Le lieu des extrémités des droites ainsi ob-
» tenues est une épicycloïde du même genre que la pre-
» mière. »

8. *Théorème IV.* « Les droites menées par un point quel-
» conque parallèles et égales aux portions des normales à
» une épicycloïde comprise entre leur pied et leur premier
» point de rencontre avec le cercle directeur, sont les rayons
» vecteurs d'une épicycloïde du même genre. »

Dans le cas de l'ellipse, on obtient une seconde ellipse qui n'est autre chose que la première ayant tourné de 90° autour de son centre.

9. *Théorème V.* « Les droites menées par un point quel-
» conque parallèles et égales aux rayons de courbure d'une
» épicycloïde ordinaire, sont les rayons vecteurs d'une épi-
» cycloïde allongée ou raccourcie du même genre. »

Cette dernière épicycloïde peut être considérée comme décrite par un point coïncidant primitivement avec le centre de son cercle directeur, lequel est par conséquent un point multiple de l'épicycloïde.

10. *Théorème VI.* « Des points en nombre quelconque
» parcourant sur un plan des épicycloïdes ordinaires sem-
» blables, de manière qu'à chaque instant les tangentes à
» ces épicycloïdes soient parallèles; la résultante des droites
» menées à chaque instant parallèles et égales aux rayons
» vecteurs de ces épicycloïdes est le rayon vecteur d'une
» épicycloïde ordinaire semblable aux précédentes. »

« La tangente en un point quelconque de cette épicycloïde » est parallèle aux tangentes aux points correspondants des » premières. »

On déduit ce théorème du théorème I en remarquant que la tangente d'une épicycloïde ordinaire s'infléchit d'un angle proportionnel à celui dont augmente l'angle d'anomalie de son point de contact.

11. A l'aide du dernier théorème on démontre très-facilement le suivant, en se reportant à la définition du mouvement de réptation donné par Jean Bernoulli.

Théorème VII. « Une épicycloïde ordinaire rampant sur » une épicycloïde semblable, un point quelconque lié à la » courbe mobile engendre une épicycloïde semblable aux » précédentes (1). »

Ce théorème s'applique à la cycloïde ordinaire considérée comme limite d'une épicycloïde ordinaire dont le rayon de cercle directeur augmente indéfiniment.

12. Imaginons un certain nombre d'épicycloïdes engendrées par des points liés à un même cercle roulant sur un cercle fixe, et construisons des courbes homothétiques à ces épicycloïdes par rapport au centre du cercle fixe et avec des rapport d'homothétie différents. Les points des nouvelles épicycloïdes qui sont les homologues des points des premières correspondant à une même position du cercle mobile, peuvent évidemment être considérés comme correspondant à des angles d'anomalie égaux. On peut par conséquent leur appliquer le théorème I.

Supposons, par exemple, une ellipse engendrée par un point lié à une circonférence roulant intérieurement sur une circonférence deux fois plus grande. On démontre facilement que la normale en chacun des points de cette ellipse rencontre l'un ou l'autre de ces axes en un point dont la distance au centre est constamment proportionnelle à celle du point de la circonférence mobile qui engendre l'axe en question. De là résultent les deux théorèmes suivants :

---

(1) Voir une *Étude sur les reptoires* par M. Prouhet, *Nouvelles Annales*, 1re série, t. XIII.

Théorème VIII. « Le lieu des extrémités des droites me-
» nées par un même point parallèles et égales aux portions
» des normales à une ellipse comprises entre cette couche et
» l'un de ses deux axes est une ellipse. »

Théorème IX. « Le lieu des extrémités des droites menées
» par un même point parallèles et égales aux portions des
» normales à une ellipse comprises entre ses deux axes est
» une ellipse.

» Les axes de la nouvelle ellipse sont inversement pro-
» portionnels à ceux de la première. »

Remarque. — Il est facile de voir que les théorèmes précédents sont également vrais pour l'hyperbole. Le premier s'applique aussi à la parabole considérée comme ellipse limite.

III

13. Les propriétés des épicycloïdes qui me restent à passer en revue sont comprises comme les précédentes dans un même théorème fondamental. Ce théorème peut lui-même se déduire du théorème I; mais il est plus simple de le démontrer directement en s'appuyant sur le lemme suivant :

Lemme. «Deux points décrivant dans un plan deux cir-
» conférences, avec des vitesses angulaires constamment égales,
» tout point qui divise dans un rapport constant la droite
» joignant les deux premiers points décrit une circonférence
» avec la même vitesse angulaire.

» Les centres de ces circonférences sont situés sur une
» même ligne droite qui est divisée par ces points dans le
» rapport précité. »

Ce théorème a été donné par M. Grouard dans une *Étude sur les figures semblables* (*Bulletin de la société Philomathique*, t. II, p. 105).

Si les deux premières circonférences se déplacent parallèlement à elles-mêmes et indépendamment l'une de l'autre, la troisième circonférence se déplace aussi parallèlement à elle-même sans changer de grandeur :

14. En tenant compte de cette remarque, on démontre facilement le théorème suivant :

« *Théorème X.* Deux points décrivant dans un plan deux » épicycloïdes du même genre, de façon que les angles d'ano- » malie correspondant à ces points croissent simultanément » de quantités égales, tout point qui divise dans un rapport » constant la droite qui joint les deux premiers points dé- » crit une épicycloïde du même genre que les précédentes » et suivant la même loi.

» Les centres des cercles fixes de ces trois épicycloïdes sont » sur une même ligne droite qui est divisée par ces points » dans le rapport précité. Il en est de même des centres des » cercles mobiles et des points de contact des cercles géné- » rateurs de ces épicycloïdes. »

Les éléments de la nouvelle épicycloïde se trouvent ainsi complétement déterminés.

15. Le théorème précédent peut s'étendre à un nombre quelconque d'épicycloïdes du même genre situées dans un même plan ou dans des plans parallèles. Ainsi généralisé, il peut s'énoncer commodément de la manière suivante :

Théorème XI. « Des points matériels de masses différentes » et en nombre quelconque décrivant dans un même plan » (dans des plans parallèles) des épicycloïdes du même » genre, de façon que les angles d'anomalie correspondants » croissent constamment de la même quantité dans le » même temps, leur centre de gravité décrit une épicycloïde » du même genre suivant la même loi et dans le même plan » (dans un plan parallèle aux précédents).

» Le centre du cercle fixe de cette épicycloïde est le cen- » tre de gravité des points matériels transportés aux centres » des cercles fixes de leurs épicycloïdes respectives. Il en est » de même des centres des cercles mobiles et des points de » contact des cercles générateurs de ces épicycloïdes. »

16. Ce théorème s'applique aux cycloïdes considérées comme limites d'épicycloïdes du même genre.

Dans le cas de l'ellipse, il peut se généraliser encore davantage au moyen de cette remarque que « la projection or- » thogonale d'une ellipse sur un plan quelconque est une » ellipse, dont l'angle d'anomalie en chaque point diffère » d'une quantité constante de l'angle d'anomalie au point » correspondant de la première. »

D'après cela, on démontre facilement le théorème suivant :

Théorème XII. « Des points matériels de masses diffé-
» rentes et en nombre quelconque décrivant dans l'espace
» des ellipses de façon que les angles d'anomalie correspon-
» dants à ces points croissent constamment de la même
» quantité dans le même temps, leur centre de gravité dé-
» crit lui-même une ellipse suivant la même loi.

» Le centre de cette ellipse est le centre de gravité des
» points matériels transportés aux centres de leurs ellipses
» respectives. »

17. Ce théorème subsiste lorsque quelques-unes des ellipses sont infiniment aplaties; en les supposant toutes dans ce cas, le théorème peut prendre la forme suivante :

Théorème XIII. « Des points matériels de masses diffé-
» rentes et en nombre quelconque exécutent des vibrations
» isochrones dans des directions quelconques, de façon que
» leurs déplacements simultanés varient comme les cosinus
» d'angles croissant de la même quantité dans le même
» temps, leur centre de gravité décrit une ellipse de manière
» que l'angle d'anomalie correspondant varie comme les an-
» gles précédents.

» Le centre de cette ellipse est le centre de gravité des
» points matériels transportés à leurs centres de vibration
» respectifs. »

Pour fixer les idées, on peut supposer les points matériels animés de vitesses satisfaisant à une relation de la forme

$$V = a \sin 2\pi \frac{t - t_0}{T}$$

le temps T d'une vibration double étant le même pour tous les points.

18. Revenons maintenant au théorème IX pour en tirer quelques conséquences intéressantes.

En supposant que les deux épicycloïdes n'en fassent qu'une, on obtient le théorème suivant :

Théorème XIV. « Le lieu des points qui divisent dans un
» rapport constant les cordes d'une épicycloïde dont les deux

» extrémités ont des angles d'anomalie différant d'une quan-
» tité constante, est une épicycloïde du même genre.

» Le centre de cercle fixe de cette épicycloïde est le même
» que celui de la première.

En particulier :

» Le lieu des points qui divisent dans un rapport constant
» les cordes d'un limaçon vues du pôle sous un même an-
» gle est un limaçon. »

Le théorème est évident dans le cas de l'ellipse.

19. *Théorème XV.* « Le lieu des points qui divisent dans
» un rapport constant les portions des normales à une épi-
» cycloïde comprises entre leur pied et leur premier point
» de rencontre avec le cercle directeur est une épicycloïde
» du même genre. »

La construction qui permet de trouver les éléments du lieu dans le cas général examiné (art. 14) est en défaut dans le cas actuel.

Mais on peut les déterminer facilement en remarquant que le centre du cercle générateur de la nouvelle épicycloïde divise dans le rapport donné le rayon du cercle générateur de la première qui aboutit au point où ce cercle touche le cercle directeur. Il est évident d'ailleurs que les cercles directeurs des deux épicycloïdes sont concentriques.

Le théorème analogue au précédent dans le cas de la cycloïde peut s'énoncer ainsi :

« Le lieu des points qui divisent dans un rapport constant
» les normales d'une cycloïde est une cycloïde. »

Il est facile de voir que le cercle générateur de la nouvelle cycloïde est égal à celui de la première; les droites sur lesquelles ces cercles roulent sont d'ailleurs parallèles.

20. *Théorème XVI.* « Le lieu des points qui divisent dans un
» rapport constant les rayons de courbure d'une épicycloïde
» ordinaire est une épicycloïde du même genre (allongée
» ou raccourcie).

Le cercle directeur de cette épicycloïde est parallèle à celui de la première. Quant à ses éléments, ils se déduisent facilement des éléments de l'épicycloïde donnés et de ceux de sa développée.

Dans le cas de la cycloïde, ce théorème rentre dans le précédent.

21. *Théorème XVII.* « Le lieu des points qui divisent dans » un rapport constant les portions des normales à une » ellipse comprises entre leur pied et l'un des axes est une » ellipse. »

En prenant pour le rapport une valeur convenable, on peut trouver soit le second axe, soit l'un ou l'autre des deux cercles concentriques à l'ellipse, et ayant pour rayons la demi-somme et la demi-différence de ses axes.

Le théorème précédent est vrai pour l'hyperbole et pour la parabole.

22. La plupart des théorèmes énoncés ci-dessus et qui conviennent à l'ellipse conviennent également à la parabole, et il est facile de démontrer que l'ordonnée à l'axe est l'élément qui, dans la parabole, joue le même rôle que l'angle d'anomalie dans l'ellipse.

C'est ainsi que du théorème XII résulte le théorème suivant :

Théorème XVIII. « Des points matériels de masses diffé- » rentes et en nombre quelconque décrivant dans l'espace » des paraboles de manière à s'éloigner dans le même » temps des axes de ces paraboles de quantités proportion- » nelles à leurs paramètres, le centre de gravité de ces points » décrit lui-même une parabole suivant la même loi. »

23. On peut supposer un certain nombre de paraboles infiniment évasées, c'est-à-dire réduites à des lignes droites ; et le théorème précédent subsiste.

En appliquant en particulier ce théorème à la parabole et à sa tangente au sommet, on démontre facilement que « le lieu des points qui divisent dans un rapport constant » les portions des tangentes à une parabole comprises entre » leur point de contact et leur point de rencontre avec la » tangente au sommet est une parabole ayant même axe » et même sommet que la première. »

On peut encore tirer du même théorème ce résultat connu, à savoir, que « le lieu des pieds des perpendiculaires » abaissées du foyer d'une parabole sur les normales à cette » courbe est une parabole. »

IV.

24. Voici maintenant quelques théorèmes concernant exclusivement les épicycloïdes ordinaires et comprenant comme cas particuliers des propriétés caractéristiques et bien connues de ces courbes.

Du théorème XI et d'une remarque faite précédemment (art. 10), on déduit immédiatement le théorème suivant :

Théorème XIX. « Des points matériels de masses différentes » et en nombre quelconque décrivant dans le même plan ou » dans des plans parallèles des épicycloïdes (cycloïdes) or- » dinaires semblables avec des vitesses à chaque instant » parallèles, le centre de gravité de ces points décrit lui- » même une épicycloïde (cycloïde) ordinaire semblable aux » précédentes et satisfaisant aux mêmes conditions. »

25. Ce théorème peut s'énoncer de la manière suivante, dans le cas où l'on ne considère que deux épicycloïdes :

Théorème XX. « Deux points parcourant dans un plan » deux épicycloïdes (cycloïdes) ordinaires semblables, de fa- » çon que les tangentes correspondantes soient constamment » parallèles, le lieu du point qui divise dans un rapport » constant la droite joignant les deux premiers points » est une épicycloïde (cycloïde) semblable aux deux pre- » mières. »

26. De ce théorème, on en déduit un autre d'une nature toute différente, en s'appuyant sur le lemme que voici :

Lemme. « Imaginons sur un plan trois courbes (A), (B), » (C), telles que les points a, b, c, de ces courbes pour les- » quels les tangentes sont parallèles, soient en ligne droite » et satisfassent à la relation $\frac{ac}{bc} = \frac{m}{n}$ (constante). Faisons » tourner (B) d'un certain angle dans le plan; la tangente » en b à (B) rencontrera alors la tangente en a à (A), en » un certain point i, par lequel nous menons une droite ic' » telle que $\frac{\sin aic'}{\sin bic'} = \frac{m}{n}$. L'enveloppe de cette droite est » une courbe égale à la courbe (C). »

27. *Théorème XXI.* « Un angle de grandeur constante se

» meut dans un plan de manière que ses côtés restent con-
» stamment tangents à deux épicycloïdes (cycloïdes) ordi-
» naires semblables. Une droite invariablement liée à cet
» angle et passant par son sommet enveloppe une épicy-
» cloïde (cycloïde) semblable aux deux premières. »

En désignant par A, B, C, les trois tangentes dans des positions correspondantes, par ρ_A, ρ_B, ρ_C, les rayons de courbures correspondants; par S_A, S_B, S_C, trois arcs enveloppés simultanément par les trois droites (A), (B), (C), on a les relations

$$\rho_A \sin \widehat{BC} + \rho_B \sin \widehat{CA} + \rho_C \sin \widehat{AB} = 0$$

$$S_A \sin \widehat{BC} + S_B \sin \widehat{CA} + S_C \sin \widehat{AB} = 0$$

On peut remarquer que, dans le cas des cycloïdes, lorsque deux de ces courbes seront égales, la troisième sera égale aux deux premières.

28. Dans le dernier théorème, on peut supposer que les deux côtés de l'angle soient tangents à la même épicycloïde. En supposant, de plus, que la troisième droite conserve une inclinaison constante sur l'un des côtés de cet angle, pendant que celui-ci augmente jusqu'à devenir égal à 180°, on obtient le théorème suivant :

Théorème XXII. « L'enveloppe des droites coupant une
» épicycloïde (cycloïde) ordinaire sous un angle constant est
» une épicycloïde semblable (cycloïde égale). »

Dans le cas où l'angle est droit, on retrouve cette propriété bien connue des épicycloïdes, à savoir, que « la déve-
» loppée d'une épicycloïde (cycloïde) ordinaire est une épicy-
» cloïde semblable (cycloïde égale). »

29. En terminant, j'indiquerai deux autres propriétés des épicycloïdes, qui, sans être liées aux précédentes, ont quelque analogie avec elles et se démontrent à peu près de la même manière.

La première peut être considérée comme une généralisation du théorème de M Grouard, dont j'ai fait usage précédemment (art. 13); on peut l'énoncer de la manière suivante :

Théorème XXIII. « Deux points décrivant dans un même » plan deux cercles avec des vitesses angulaires constamment » proportionnelles, tout point qui divise dans un rapport » constant la droite joignant à chaque instant les deux pre- » miers points décrit une épicycloïde. »

Soient C et C' les centres des deux circonférences, A et A' les points qui les parcourent pris dans des positions correspondantes. Le point O, qui divise CC' dans le rapport donné, est le centre du cercle fixe de l'épicycloïde; la parallèle OF à C'A', comprise entre le point O et la droite CA', est le rayon de la circonférence fixe; la parallèle FM à CA, comprise entre le point F et la droite AA', est le rayon de la circonférence mobile. De là, on déduit facilement les circonférences qui, en roulant l'une sur l'autre, engendrent l'épicycloïde.

La construction que nous avons indiquée pouvant se faire de deux manières, on voit que l'épicycloïde pourra s'engendrer de deux manières différentes par le roulement d'une circonférence sur une autre.

On est ainsi conduit à la double génération des épicycloïdes quelconques, que j'indiquerai après avoir énoncé le théorème suivant, qui y conduit également :

30. *Théorème XXIV.* « Deux points décrivant dans un » même plan deux circonférences avec des vitesses constam- » ment proportionnelles, la résultante des deux droites me- » nées à chaque instant parallèles et égales aux rayons de » ces deux circonférences est le rayon vecteur d'une épicy- » cloïde. »

Ce théorème résulte immédiatement de la définition des épicycloïdes, que j'ai rappelée au commencement de cette note.

31. Soient O et F les centres de deux circonférences dont l'une roule sur l'autre, et M un point lié à la circonférence mobile et engendrant pendant son mouvement une épicycloïde quelconque (ordinaire, allongée ou raccourcie).

Cette épicycloïde peut être engendrée au moyen de deux autres circonférences faciles à déterminer. Pour cela, on joint le point M au point B de contact des deux premières circonférences ; le point d'intersection B' de cette droite et de la parallèle à FM menée par le point O est le point de contact des deux nouvelles circonférences. Le point d'intersection F'

de OB' et de la parallèle à OF menée par le point M est le centre de la circonférence mobile. D'ailleurs le nouveau cercle directeur a le même centre que l'ancien. Au moyen de ces éléments, on peut facilement construire les deux nouvelles circonférences génératrices, en remarquant que la nouvelle circonférence mobile doit être en dedans ou en dehors de la circonférence sur laquelle elle roule, suivant que l'ancienne circonférence mobile était elle-même en dedans ou en dehors de la circonférence fixe correspondante. Dans le premier cas, les deux circonférences mobiles rouleront sur leurs circonférences fixes en sens contraire; dans le second cas, elles rouleront dans le même sens.

La double génération des épicycloïdes ordinaires est connue depuis longtemps; c'est Euler, je crois, qui l'a fait connaître le premier; mais on ne connaissait pas encore la double génération des épicycloïdes allongées et raccourcies, si ce n'est dans deux cas particuliers : dans le cas de l'ellipse et dans le cas du limaçon de Pascal. Le deuxième mode de génération du limaçon de Pascal se trouve indiqué dans un théorème énoncé par M. Mannheim dans le tome XVII de la première série des *Nouvelles annales*. Ainsi que nous venons de le faire voir, on a d'une manière générale le théorème suivant :

Théorème XXV. « Toute épicycloïde (ordinaire, allongée » ou raccourcie) peut être engendrée de deux manières diffé- » rentes par une circonférence mobile roulant sur une circon- » férence fixe. »

R et R' désignant les rayons des circonférences fixe et mobile correspondant à un premier mode de génération, a la distance du point décrivant au centre du cercle mobile; R_1, R_1', a_1, désignant les éléments correspondants dans le second cas, on a:

$$a_1 = R \pm R'$$

$$R_1 = a \frac{R}{R'}$$

$$R_1' = a \frac{R \pm R'}{R'}$$

les signes (+) correspondant au cas de l'épicycloïde proprement dite, les signes (—) au cas de l'hypocycloïde.

Séance du 23 mai 1868.

PRÉSIDENCE DE M. TRANSON.

M. Lartet rend compte de la découverte d'ossements humains de l'époque de l'âge de la pierre, aux Eyzies.

Séance du 30 mai 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. Laguerre expose le résultat de ses recherches sur les centres de courbure des surfaces anallagmatiques.

Séance du 6 juin 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. Laguerre discute un théorème de M. Williams Roberts.

M. Lartet décrit l'appareil de M. Da Sylva, destiné à enregistrer les tremblements de terre et à indiquer leur direction.

Séance du 13 juin 1868.

PRÉSIDENCE DE M. LAGUERRE.

M. Delanoue, de retour d'un voyage en Égypte, fait part de ses observations sur les lacs salés de l'isthme de Suez.

M. Laguerre discute certaines variétés remarquables des surfaces anallagmatiques.

Séance du 20 juin 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. Fischer fait une communication sur les prétendus Poulpes gigantesques, qui sont tous des Céphalopodes Décapodes (*Loligo*, *Ommastrephes*, etc.), et non des Octopodes.

Séance du 27 juin 1868.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

M. Laurent est nommé président pour le deuxième semestre de l'année 1868.

M. Delesse rend compte des observations géologiques qu'il a faites le long de la tranchée du chemin de fer de Paris à Cherbourg.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.— A. CHAIX ET C°, RUE BERGÈRE, 20.—14688-8

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS

Séance du 4 juillet 1868.

PRÉSIDENCE DE M. DELANOUE.

M. Alix complète une communication antérieure sur l'anatomie de l'Autruche.

Sur l'anatomie de l'Autruche d'Afrique, par M. Alix.

Je viens communiquer à la Société quelques observations que j'ai pu faire sur une Autruche d'Afrique, grâce à l'obligeance de M. Alphonse Milne-Edwards qui a bien voulu me confier cet Oiseau dont il avait fait l'acquisition pour en conserver le squelette.

N'ayant pas l'intention de répéter ici ce qui a été dit dans d'autres travaux tels que ceux de Meckel et celui plus récent de M. Macalister (*Proceed. of the royal irish Academy*, 1864), je me bornerai aux détails suivants :

Le membre thoracique de l'Autruche ne diffère pas seulement de celui des autres Oiseaux par la forme et la disposition des os de l'épaule, par la longueur de l'humérus et la

brièveté de l'avant-bras, il en diffère encore par l'arrangement et le jeu de plusieurs articulations. Ainsi le radius ne se meut pas sur le cubitus parallèlement à son axe et, avec l'absence de ce mouvement, coïncide celle du ligament et du fibro-cartilage interarticulaires que l'on voit habituellement dans l'articulation du coude. D'ailleurs le mouvement de pronation et de supination du cubitus signalé par Strauss-Durckheim et par nous (*Bull. de la Soc. phil.* et journal *l'Institut*, 1863) a lieu chez l'Autruche.

Les articulations du poignet offrent certainement la différence la plus curieuse à observer. Habituellement l'os cubital du carpe (*Bull. de la Soc. phil.* et journal *l'Institut*, 1863) est disposé de telle sorte que, lorsque la main s'incline vers le bord du cubital de l'avant-bras, cet os, glissant à la fois sur le bord correspondant du métacarpe et sur la face palmaire du cubitus, modifie le mouvement de la main à la façon d'un excentrique, de telle sorte que la face dorsale de la main vient regarder la face palmaire de l'avant-bras; d'autre part, il ne peut y avoir que ce mouvement d'adduction, et la flexion directe de la main sur l'avant-bras est impossible. Chez l'Autruche, il peut, au contraire, y avoir un léger mouvement de flexion directe de la main sur l'avant-bras. En outre, l'adduction est excessivement limitée, et d'ailleurs l'os cubital est incapable de glisser soit sur l'avant-bras, soit sur le métacarpe; il s'oppose comme un coin au mouvement habituel d'inclinaison de la main vers le cubitus.

D'un autre côté, tandis que chez les autres Oiseaux le bord radial de la main peut à peine se placer dans la ligne du radius, chez l'Autruche la main peut dépasser cette ligne et s'incliner vers le bord libre du radius par un mouvement d'abduction; dans ce mouvement, le métacarpe glisse en outre sur une facette que présente à sa face dorsale l'os radial du carpe, en sorte que la main, en s'inclinant, est entraînée par un mouvement excentrique; d'où il résulte que sa face palmaire arrive à regarder la face dorsale de l'avant-bras. C'est de toute manière l'opposé de ce qui a lieu chez les autres Oiseaux.

Si nous ajoutons à cela que les phalanges du doigt moyen (au nombre de trois) s'inclinent vers le bord radial de la

main et non vers son bord cubital, on verra que la totalité du membre thoracique se courbe dans le même sens au lieu d'offrir trois segments (le bras, l'avant-bras et la main) pliés successivement en sens inverse l'un de l'autre.

Il y a une relation entre ces faits et l'usage que les Autruches font de leurs ailes. Ces organes en effet ne leur servent pas pour voler, mais elles les étendent comme des voiles quand elles courent dans la direction du vent, et, grâce à la disposition des os, les plumes, disposées sur la convexité d'une courbe, occupent un plus grand espace. Si, au contraire, l'oiseau court contre le vent, les ailes peuvent être facilement rabattues sur le poitrail de manière à n'opposer aucun obstacle à la rapidité du mouvement.

Séance du 11 juillet 1868.

PRÉSIDENCE DE M. DELANOUE.

M. Alix rend compte d'expériences nouvelles de M. Czerny, relatives à l'action des verres grossissants sur la rétine.

M. Puel donne quelques détails sur les mœurs d'un Ouistiti.

Communication de M. Fischer sur la distribution géographique des Baleines.

Séance du 18 juillet 1868.

PRÉSIDENCE DE M. DELANOUE.

M. Fischer continue l'étude de la distribution géographique des Baleines.

Séance du 25 juillet 1868.

PRÉSIDENCE DE M. DELANOUE.

M. Laurent expose les nouveaux procédés employés pour les forages instantanés.

M. Delesse présente quelques observations à ce sujet.

Séance du 1er août 1868.

PRÉSIDENCE DE M. LAURENT.

M. Delanoue, à la suite d'un voyage récent en Égypte, fait une communication sur la géologie de cette contrée.

Séance du 8 août 1868.

PRÉSIDENCE DE M. LAURENT.

M. Alix rend compte de ses recherches sur la disposition des lignes papillaires de la main et du pied.

M. Hamy présente les résultats de ses études sur le développement de la face et sur l'os intermaxillaire.

IMP. CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS — 14692-8

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS.

Séance du 17 octobre 1868.

PRÉSIDENCE DE M. ROZE.

Communication de M. Fischer sur quelques particularités de l'organisation des *Squalodon*.

Séance du 24 octobre 1868.

PRÉSIDENCE DE M. LABOULAYE.

M. Prillieux rend compte de ses recherches sur les mouvements des plantes déterminés par des agitations ou des chocs à direction constante.

Séance du 31 octobre 1868.

PRÉSIDENCE DE M. LAUSSEDAT.

M. Prillieux complète la communication commencée dans la séance précédente.

M. Laussedat décrit un nouveau régulateur.

M. Félix Chio présente le résumé d'un troisième mémoire sur la série de Lagrange.

Séance du 7 novembre 1868.

PRÉSIDENCE DE M. LAURENT.

M. l'abbé Aoust adresse à la Société une note intitulée : *Sur les courbures des surfaces.*

M. Laguerre fait une communication sur les surfaces quadricuspidales.

M. Marey rend compte de ses expériences sur le vol des Insectes.

Sur la théorie des surfaces, par M. l'abbé Aoust.

Nous avons déjà établi qu'un certain nombre de propriétés relatives à la courbure d'une surface s'étendent, convenablement modifiées, à un autre élément du même ordre que cette courbure, mais plus général, et contenant une fonction arbitraire de l'angle des lignes coordonnées auxquelles un point quelconque de cette surface est rapporté. Nous avons

donné plusieurs expressions remarquables de cet élément ; le but de la présente note est de donner l'expression du même élément en fonction des variations des arcs et de l'angle des lignes coordonnées.

I. Nous conservons toutes les notations et hypothèses adoptées dans les deux notes insérées dans le journal *l'Institut*, numéros du 2 janvier et du 26 février 1868. Nous appelons $\frac{1}{K_n}$ la courbure de la surface, $\frac{1}{K_t}$ une expression qui se compose par rapport aux composantes tangentielles des courbures propres ou inclinées des lignes coordonnées comme $\frac{1}{K_n}$ se compose par rapport aux composantes normales de ces mêmes courbures ; $\Psi(\varphi)$ est une fonction arbitraire de l'angle φ des lignes coordonnées, Ψ' sa dérivée première, Ψ'' sa dérivée seconde. Nous définissons l'élément qui nous occupe par l'équation

$$(9) \qquad \frac{1}{H(\Psi)} = \frac{\Psi'}{K_n} + \sin\varphi \frac{\Psi''}{K_t} ;$$

on a, d'après les équations (18)″ et (19)′ de notre théorie des coordonnées curvilignes quelconques, les équations suivantes :

$$(10) \left\{ \frac{d\omega}{R_1} = d_1(\cos\varphi . d\sigma_2) - d_2 d\sigma_1, \quad \frac{d\omega}{L_1} = d_2 d\sigma_1 - \cos\varphi\, d_1 d\sigma_2 . \right\}$$

Or, si l'on porte ces deux valeurs dans les formules (6) de la note du 26 février, en remarquant que chacune des deux équations précédentes est double par suite de la permutation des arcs coordonnés, on obtient l'équation suivante, qui est aussi double

$$(11) \quad \frac{d\omega}{H(\Psi)} = d_1 \left\{ \frac{\Psi'(\varphi)}{\sin\varphi} . \frac{\cos\varphi\, d_2 d\sigma_1 - d_1 d\sigma_2}{d\sigma_1} \right\} + d_2 \left\{ \frac{\Psi'(\varphi)}{\sin\varphi} . \frac{d_1(\cos\varphi\, d\sigma_2) - d_2 d\sigma_1}{d\sigma_2} \right\},$$

de laquelle on déduit l'équation suivante, qui est symétrique par rapport aux arcs coordonnés

$$(12)\quad \frac{d\omega}{H(\Psi)} + d_1 d_2 \Psi = d_1 \left\{ \frac{\Psi'(\varphi)}{\sin\varphi} \cdot \frac{\cos\varphi\, d_2 d\sigma_1 - d_1 d\sigma_2}{d\sigma_1} \right\} + d_2 \left\{ \frac{\Psi'(\varphi)}{\sin\varphi} \cdot \frac{\cos\varphi\, d_1\, d\sigma_2 - d_2\, d\sigma_1}{d\sigma_2} \right\}.$$

Ces deux formules ont toute la généralité désirable puisqu'elles se rapportent 1° à un système quelconque de lignes coordonnées, 2° à toutes les formes possibles de la fonction Ψ.

II. Ces deux équations, qui donnent la valeur de l'élément $\frac{1}{H(\varphi)}$, se modifient suivant le système de lignes coordonnées dont on fait usage. Si une des séries des lignes coordonnées, ρ_2, par exemple, est composée de lignes géodésiques, ces équations deviennent

$$(13)\quad \frac{d\omega}{H(\Psi)} = d_1 \left\{ \frac{\Psi'(\varphi)}{\sin\varphi} \cdot \frac{\cos\varphi\, d_2\, d\sigma_1 - d_1\, d\sigma_2}{d\sigma_1} \right\},$$

or, dans ce système de coordonnées, on a la relation

$$d_2\, d\sigma_1 = d_1\, (\cos\varphi\, d\sigma_2),$$

et en ayant égard à cette relation, l'équation se transforme et devient

$$(13)'\quad \frac{d_1}{d\sigma_1} \left\{ \Psi'(\varphi) \cdot \frac{d_1\, (\sin\varphi\, d\sigma_2)}{d\sigma_1} \right\} + \frac{\sin\varphi\, d\sigma_2}{H(\Psi)} = 0.$$

Si les deux séries de lignes coordonnées sont l'une et l'autre géodésiques, on a simplement

$$(14)\quad \frac{d_1\, d_2\, \Psi}{d\sigma_1\, d\sigma_2} + \frac{\sin\varphi}{H(\Psi)} = 0.$$

III. La fonction Ψ qui entre dans les relations précédentes peut prendre une infinité de formes dont la plus intéressante est celle qui résulterait de ce que le rapport de cette fonc-

tion à l'angle φ des lignes coordonnées serait constant et égal à l'unité. L'inspection de l'équation (9) montre que, dans ce cas, l'élément $\frac{1}{H(\Psi)}$ devient égal à la courbure de la surface $\frac{1}{K_n}$. Ceci permet d'exprimer cet élément en fonction des variations des arcs et de l'angle des lignes coordonnées. En effet, la formule (11) devient

$$(11)' \quad \frac{d\omega}{K_n} = d_1\left\{\frac{\cos\varphi\, d_2\, d\sigma_1 - d_1\, d\sigma_2}{\sin\varphi\, d\sigma_1}\right\} + d_2\left\{\frac{d_1\,(\cos\varphi\, d\sigma_2) - d_2\, d\sigma_1}{\sin\varphi\, d\sigma_2}\right\},$$

et la formule (12)

$$(12)' \quad \frac{d\omega}{K_n} + d_1 d_2 \varphi = d_1\left\{\frac{\cos\varphi\, d_2 d\sigma_1 - d_1 d\sigma_2}{\sin\varphi\, d\sigma_1}\right\} + d_2\left\{\frac{\cos\varphi\, d_1 d\sigma_2 - d_2 d\sigma_1}{\sin\varphi\, d\sigma_2}\right\}.$$

Si ces deux formules ne sont pas connues, elles sont du moins équivalentes à des formules connues que l'on obtient en introduisant dans ces dernières les paramètres différentiels H, H_1, G, tirés de l'expression du déplacement quelconque ds effectué sur la surface

$$ds^2 = H^2\, d\rho^2 + H_1^2\, d\rho_1^2 + 2\, G^2\, d\rho\, d\rho_1.$$

Si une série de lignes coordonnées : $\rho_2 = \text{const.}$, est composée de lignes géodésiques, la formule (13)′ devient

$$(13)'' \quad \frac{d_1^2\,(\sin\varphi\, d\sigma_2)}{d\sigma_1^2} + \frac{\sin\varphi\, d\sigma_2}{K_n} = 0$$

qui se rapporte à un angle φ variable, et lorsque cet angle est droit, on a l'équation de Gauss

$$\frac{d_1^2\,(d\sigma_2)}{d\sigma_1^2} + \frac{d\sigma_2}{K_n} = 0\,.$$

Dans le cas où les coordonnées, restant quelconques, ne

sont assujetties qu'à cette condition de se couper sous angle droit, on retrouve la formule

$$d_1\left(\frac{d_1\, d\sigma_2}{d\sigma_1}\right)+ d_2\left(\frac{d_2\, d\sigma_1}{d\sigma_2}\right)+ \frac{d\sigma_1\, d\sigma_2}{K_n} = 0.$$

Séance du 14 novembre 1868.

PRÉSIDENCE DE M. LAURENT.

M. de Caligny décrit un moyen de faciliter la marche automatique d'un nouveau système d'écluses de navigation.

M. Gaudry rend compte d'un voyage géologique qu'il vient d'exécuter dans le midi de la France.

Sur un nouveau moyen de faciliter la marche automatique d'un nouveau système d'écluses de navigation, par M. A. de Caligny.

On achève en ce moment, sur un canal de l'État, l'application en grand de ce système. Les périodes de l'appareil étant très-peu nombreuses, on ne s'était pas préoccupé d'abord d'obtenir une marche automatique. Mais la nécessité d'empêcher les tubes mobiles verticaux de retomber avec trop de vitesse sur leurs siéges a donné à M. de Caligny l'idée d'ajouter aux contre-poids des balanciers, des contre-poids supplémentaires attachés à ces balanciers au moyen de chaînes qui ne sont pas tendues quand les tubes mobiles sont au haut de leur course. On conçoit que les choses peuvent être disposées de manière que les chaînes se trou-

vent tendues lorsque ces contre-poids supplémentaires doivent agir pour modérer convenablement la vitesse de descente de ces tubes. Les choses sont calculées de façon à amortir convenablement la percussion de ces tubes sur leurs siéges, et à réserver, pour aider à leur soulèvement en temps utile, une force qui aurait été perdue.

Cela permet d'obtenir une marche automatique plus tôt qu'on ne l'aurait pu au moyen des contre-poids déjà essayés, parce que les oscillations en retour des premières périodes ne diminuaient pas assez les pressions qui s'opposaient au soulèvement des tubes en supposant d'ailleurs les choses disposées comme dans des communications faites précédemment à la Société.

On n'entrera dans aucun détail, d'autant plus que la marche automatique de cet appareil sera plus curieuse qu'utile, à cause du très-petit nombre de périodes de chaque opération. On ajoutera seulement que les grandes oscillations initiales et finales que M. de Caligny a produites, abstraction faite du jeu proprement dit de la machine, et qu'il a présentées à l'Académie des sciences de Paris en 1866 et 1867, faciliteront encore la marche automatique en modifiant les oscillations en retour dans les tubes.

Quel que puisse être le succès de la disposition particulière, objet de cette communication, quoiqu'il n'ait pas encore été fait d'expériences tout à fait régulières sur l'épargne de l'eau au moyen de ce système, tel qu'on l'applique en ce moment à une écluse de l'État, M. de Caligny croit pouvoir affirmer déjà, d'après les expériences préliminaires, que l'épargne sera plus grande qu'on ne l'espérait, et que la durée de chaque opération de remplissage et de vidange sera plus courte qu'on ne le pensait. (Voir les extraits de rapports faits sur ce système, dans le journal *l'Institut*, aux séances de la Société philomathique des 2 et 23 février 1867.) Il ne s'est pas présenté de vagues gênantes, comme on avait pu le craindre. C'était le point le plus essentiel à constater.

Séance du 21 novembre 1868.

PRÉSIDENCE DE M. LAURENT.

M. Haton communique à la Société, de la part de M. E. Habich, le théorème suivant : Si l'on construit à partir d'un point fixe les diverses surfaces conchoïdes d'une surface quelconque, toutes leurs normales aux points situés le long d'un même rayon vecteur se croisent en un même point de l'espace.

M. Haton présente en outre de la part de M. E. Habich un mémoire publié dans les *Annali di Matematica pura ed applicata* (série II, tome II, fasc. II), en analysant ses principaux résultats, ainsi qu'une note manuscrite dont la Société décide l'insertion dans son Bulletin. Ces deux productions sont relatives à un nouveau système de coordonnées dans le plan et dans l'espace et à son application aux caustiques.

M. Laguerre fait une communication sur quelques propriétés générales des courbes algébriques et sur leur application à la théorie des courbes et des surfaces anallagmatiques.

Quelques remarques sur les lignes et sur les surfaces réciproques et caustiques, par M. E. Habich.

Soient :

(E) l'arête de rebroussement d'une surface développable donnée;

O le point de contact d'une génératrice OM avec l'arête (E);

v l'angle sous lequel la génératrice OM est rencontrée au point M par une courbe (A), tracée sur la développable;

K_1 le centre de courbure de la section normale faite dans la développable suivant la ligne (A), et $R_1 = MK_1$ le rayon de courbure correspondant;

K le centre de courbure de la transformée de la ligne (A) dans le développement de la développable sur son plan tangent le long de la génératrice OM. (On pourrait appeler K centre de courbure géodésique) :

La droite KK_1 est la polaire de la courbe (A).

Cela posé, on trouve en désignant par α le rapport des deux courbures

$$(1) \qquad R_1 = \alpha \frac{OM}{\sin^2 v} = \alpha \frac{r}{\sin^2 v},$$

c'est-à-dire que, le long d'une même génératrice les centres de courbure des sections normales pour lesquelles $\sin^2 v$ reste invariable, se trouvent sur une même droite passant par le point de contact O.

$\sin^2 v$ ne varie pas lorsque les lignes (A) rencontrent la génératrice sous des angles égaux ou supplémentaires. On pourrait appeler ces lignes *semblables* et *réciproques* par rapport à l'arête (E).

Nous avons démontré (*Annali di matematica pura ed applicata*. Tome II, 1868, 2me livraison) que les centres de courbure géodésique de deux lignes semblables et de deux lignes réciproques se trouvent sur une même droite passant par le point O (pôle de transformation) ; il suit de là et de (1) que : *les droites polaires de deux courbes semblables ou réciproques par rapport à l'arête* (E) *se trouvent sur un même plan passant par le point* O, *pôle correspondant de transformation.*

Lorsque l'arête de rebroussement (E) est un point, la développable est une surface unique et on a les lignes semblables et réciproques par rapport à un point.

Menons par les points correspondants M et M′ des courbes réciproques (A) et (A′) leurs plans normaux, les intersections successives de ces plans formeront une surface développable (D), lieu des points également distants de (A) et de (A′) et qui a pour plan tangent le plan perpendiculaire à la génératrice OM au point P déterminé par

$$(2) \qquad q = \overline{OP} = \tfrac{1}{2}(OM + OM') = \tfrac{1}{2}(r + r').$$

En prenant la courbe (A) pour l'anticaustique des rayons

incidents et la courbe (A′) pour l'anticaustique des rayons réfléchis, la développable (D) sera la dirimante et les surfaces polaires de (A) et de (A′) seront les caustiques des rayons incidents et des rayons réfléchis.

On reconnaît aisément qu'étant données deux courbes (A) et (A′), pour que le lieu (D) des points également distants de ces courbes soit une développable, il faut que les génératrices de la surface développable déterminée par les lignes (A) et (A′) soient rencontrées par ces courbes sous des angles supplémentaires.

Lorsque la courbe (P) lieu du point P est donnée [on pourrait l'appeler podaire de la développable (D) par rapport à la courbe (E)], on a pour déterminer les réciproques (A) et (A′) les relations (2) et la suivante :

$$(3) \qquad rr' = 2\int qds + c = u^2$$

ds est l'élément de l'arc de l'arête (E). — (*Annali di matematica*. T. II, 1868).

Traçons autour du point O comme centre une sphère de rayon u (sphère variable d'inversion); les points M et M′ des réciproques (A) et (A′) seront déterminés par l'intersection de la génératrice OMM′ avec une sphère qui coupe orthogonalement la sphère d'inversion et dont le centre est situé en un point quelconque de la génératrice correspondante de la développable (D).

Considérons maintenant le cas intéressant où l'arête (E) est un point; nous le traiterons dans toute la généralité.

On a $$rr' = a^2 = \text{const.} \qquad (4)$$

(A) et (A′) sont deux surfaces (ou lignes) réciproques par rapport à un point O;

(D) est la surface lieu des points également distants de (A) et (A′);

(P) est la podaire de (D) par rapport au point O.

Les surfaces (A) et (A′) sont les enveloppes d'une sphère qui coupe orthogonalement la sphère d'inversion et dont le centre se déplace sur la surface (D).

Entre les rayons vecteurs r et r' on a la relation

$$(5) \qquad r^2 - 2qr + a^2 = 0.$$

Il s'ensuit que (5) est l'équation d'une surface (ou ligne) qui est sa propre réciproque par rapport au pôle considéré.

D'une manière analogue on pourrait déterminer une courbe semblable à elle-même, etc.

Comme les normales aux points correspondants des surfaces (A) et (A') se rencontrent au même point de la surface (D) il s'ensuit que les points de contact des rayons incidents et des rayons réfléchis, avec les caustiques, se trouvent sur une même droite passant par le pôle de transformation.

Les caustiques dans le cas considéré sont évidemment au nombre de quatre : deux pour les rayons incidents et deux pour les rayons réfléchis.

Enfin, on peut, connaissant la surface dirimante (D), déterminer l'équation générale de toutes les surfaces réciproques par rapport à un point qui sont ses anticaustiques.

En effet, si

$$q = f(\theta, \varphi)$$

est l'équation de la podaire (P) de la dirimante (D) par rapport au pôle O,

[$\theta = \mathrm{PO}z$ et φ est l'angle dièdre formé par les plans $\mathrm{PO}z$ et $x\mathrm{O}z$]

l'équation de la podaire (P') de la même dirimante (D) par rapport à un autre pôle O' sera :

$$(6) \quad q' = q - \mathrm{OO}' \left[\cos\theta . \cos\theta_0 + \sin\theta . \sin\theta_0 . \cos(\varphi - \varphi_0)\right];$$

où OO' est la distance des deux pôles et θ_0 et φ_0 les angles formés par OO' et le plan P'O'z' avec les directions invariables des axes et des plans coordonnés.

Des relations (4) et (6) on déduira l'équation générale (5) qui comprend les anticaustiques cherchées.

Séance du 28 novembre 1868.

PRÉSIDENCE DE M. LAURENT.

Suite de la communication commencée dans la séance précédente par M. Laguerre.

Sur quelques propriétés générales des courbes algébriques et sur leur application à la théorie des courbes et des surfaces anallagmatiques, par M. Laguerre.

1. Avant d'aborder ce qui est relatif aux anallagmatiques, je m'occuperai d'abord du lieu décrit par le sommet d'un angle de grandeur donnée dont les côtés s'appuient respectivement sur deux courbes fixes. Je dirai d'abord ce que l'on doit entendre par angle de deux droites, lorsque le sens dans lequel doivent être prises ces droites n'est pas déterminé. Etant données deux droites A et B, faisons tourner la première autour de leur point de rencontre, et dans un sens déterminé, par exemple, celui des aiguilles d'une montre, jusqu'à ce que cette droite s'applique sur B; je dirai que l'angle ainsi décrit est l'angle que fait la droite A avec la droite B. Si l'on continuait le mouvement de rotation, après avoir décrit un angle égal à π, A viendrait de nouveau s'appliquer sur B. L'angle que fait A avec B n'est donc déterminé qu'à un multiple près de π; sa tangente est déterminée, mais son sinus et son cosinus ne le sont pas; le double de cet angle est déterminé à un multiple près de 2π, et les valeurs de toutes ses lignes trigonométriques sont parfaitement connues.

Ces définitions étant établies, étant donnés dans un plan deux points fixes A et B, si l'on cherche dans ce plan le

lieu du point M, tel que l'angle de MA avec MB ait une valeur donnée (à un multiple près de π, nécessairement), l'on trouvera pour ce lieu un cercle, passant par les points A et B, et *tous* les points de ce cercle feront partie du lieu. Le cercle symétrique du précédent serait le lieu des points M, pour lesquels l'angle de MA avec MB aurait une valeur supplémentaire de la valeur donnée précédemment.

2. Ceci posé, cherchons le centre du cercle, lieu des points M tels que l'angle que fait MA avec MB ait une valeur donnée ω. Ce centre est le *foyer singulier* de la courbe, c'est donc le point réel situé sur la tangente menée à cette courbe en un quelconque des ombilics.

Appelons I l'ombilic par lequel passent les diverses lignes isotropes du plan qui ont pour coefficient angulaire i.

Soit K un point du lieu infiniment voisin du point I, en sorte que KI est infiniment voisine de la tangente au cercle en I. Le point K appartenant au lieu, l'angle que fait KA avec KB est égal à ω. Maintenant, joignons le point K au deuxième ombilic du plan J ; la droite KJ sera infiniment voisine de la droite de l'infini, et le point k', où elle coupera la droite AB, sera infiniment voisin du point à l'infini sur cette droite. Soit k le point où la droite KI coupe la droite A B ; d'après une proposition fondamentale que j'ai donnée pour la première fois dans une note *sur la théorie des foyers* insérée dans les *Nouvelles Annales de mathématiques* (1853), l'on sait que le rapport anharmonique des quatre points A, B ; k, k', est égal à $e^{2\omega i}$, quantité qui est *parfaitement déterminée* (Voir § 1).

L'on aura donc

$$\frac{Ak}{Ak'} : \frac{Bk}{Bk'} = e^{2\omega i};$$

d'où en passant à la limite et en remarquant que le point k' est alors à l'infini

$$\frac{Ak}{Bk} = e^{2\omega i};$$

D'où cette conclusion : Pour trouver le centre du cercle,

lieu des points M tels que l'angle de MA avec MB ait une valeur donnée ω, prenons sur la droite AB un point k tel que le rapport $\frac{Ak}{Bk}$ ait pour valeur $e^{2\omega i}$; menons par ce point la droite isotrope qui passe au point I, le point réel situé sur cette droite sera le centre cherché.

3. Soient maintenant deux courbes quelconques A et B, cherchons le lieu des points M tels qu'une des tangentes menées de ce point à la courbe A fasse un angle donné avec une des tangentes menées de ce même point à la courbe B. Ce lieu a déjà occupé divers géomètres, notamment M. Cremona et M. Faure, qui ont déterminé son degré et sa classe. Je me propose ici de déterminer ses foyers principaux; on sait d'ailleurs que cette courbe (en général) ne rencontre la droite de l'infini qu'aux ombilics, qui sont pour elle des points multiples de l'ordre $n-1$, $2n$ étant le degré de la courbe. Considérons en particulier l'ombilic I, chacune des tangentes menées à la courbe et la touchant en ce point contiendra un point réel qui sera le foyer singulier correspondant à la branche de courbe que l'on considère. Soit un point K situé sur cette branche et à une distance infiniment voisine du point I; en sorte que la droite KI est infiniment voisine de la tangente en I à cette branche du lieu. Soient Ka, Kb, les droites menées tangentiellement aux courbes A et B et qui font l'angle donné ω. Ces deux tangentes sont nécessairement infiniment voisines de deux droites isotropes; soit F le foyer de A, qui est infiniment voisin du point réel situé sur la droite Ka; soit G le foyer de B, qui est infiniment voisin du point réel situé sur la droite Kb.

Je joins le point K au deuxième ombilic du plan J; la droite KJ coupe la droite FG en un point k' infiniment voisin de la droite de l'infini. La droite Ka coupe FG en un point F′ infiniment voisin de F, et la droite Kb coupe FG en un point G′ infiniment voisin de G. Soit de plus k le point où KI coupe FG ; d'après la proposition fondamentale que j'ai rappelée plus haut, l'on a:

$$\frac{F'k}{F'k'} : \frac{G'k}{G'k'} = e^{2\omega i}.$$

D'où, en passant à la limite et en remarquant que les points F′ et G′ viennent alors se confondre avec les points F et G et que le point k' s'en va à l'infini,

$$\frac{Fk}{Gk} = e^{2\omega i}.$$

L'on obtiendra donc le foyer singulier correspondant à la branche de courbe considérée, en déterminant, sur la droite FG, le point k par cette équation, en joignant ce point à l'ombilic I et en prenant le point réel situé sur cette courbe.

En comparant ce résultat avec celui que j'ai obtenu dans le paragraphe précédent, l'on en déduit la proposition suivante :

« Le foyer singulier, correspondant à la branche de courbe » considérée, est le centre du cercle décrit sur FG comme » segment et capable de l'angle donné ω. »

L'ensemble des foyers singuliers de la couche s'obtiendra facilement. Désignons par F, F_1.... F_m les m foyers de la courbe A, et par G, G_1... G_n les n foyers de la courbe B. Prenons un foyer quelconque F_i de A et un foyer quelconque F_j de B : le centre du cercle, décrit sur $F_i F_j$ comme segment et capable de l'angle donné, sera un des foyers singuliers de la courbe; et on les obtiendra tous en combinant, de toutes les façons possibles, chacun des foyers de A avec chacun des foyers de B.

Remarquons, en passant, que, d'après ce qui précède, l'équation du degré mn, à laquelle conduit la détermination des foyers singuliers du lieu, sera résoluble par la résolution d'une équation du degré m et d'une équation du degré n.

Un des cas les plus utiles dans les applications est celui où la courbe B se réduit à un point P. La courbe étudiée est alors une podaire, c'est-à-dire le lieu des projections du point P sur les tangentes à la courbe A. Les foyers singuliers de cette podaire sont les points milieux des segments qui joignent le point P aux différents foyers de A.

5. Je vais traiter maintenant le problème inverse du problème précédent. Étant données deux courbes fixes A et B,

un angle de grandeur constante se déplace de façon que son sommet parcoure la courbe A, tandis qu'un de ses côtés roule sur la courbe B, quels sont les foyers de la courbe C, enveloppée par le deuxième côté de l'angle?

Pour plus de clarté, je considérerai simplement le cas où l'angle constant est droit et où la courbe B se réduit à un point fixe P. Le cas le plus général se ramènerait facilement à ce cas particulier.

Je supposerai que la courbe A ait m branches qui se croisent en chacun des ombilics du plan, en sorte qu'elle aura m foyers singuliers que je désignerai par G, G′, etc. ; soit, de plus, n le nombre des points où elle coupe la droite de l'infini en dehors des ombilics. On voit que la courbe sera du degré $2m + n$ et qu'elle aura n asymptotes qui ne seront pas *isotropes*.

Joignons le point fixe P à l'un quelconque des points de la droite de l'infini, distincts des ombilics, qui appartiennent à la courbe, la droite de l'infini est perpendiculaire à cette droite, elle est donc tangente à la courbe C et elle la touche en un point α situé à l'infini sur la direction d'une perpendiculaire à l'asymptote qui passe au point α. Ce point α est d'ailleurs un foyer du lieu cherché; d'où cette conclusion: Le lieu a n foyers situés sur la droite de l'infini et sur la direction des droites perpendiculaires aux n asymptotes de la courbe qui ne sont pas isotropes.

Menons maintenant par le point P la droite isotrope qui passe par l'ombilic I ; cette droite coupe la courbe A en $m + n$ points distincts de l'ombilic. Soit b l'un quelconque de ces points, la perpendiculaire au point b à la droite Pb se confond avec cette ligne elle-même, cette droite est donc une tangente isotrope du lieu cherché. Le même raisonnement s'appliquerait à la droite isotrope qui joint le point P au deuxième ombilic J; d'où cette conclusion: Le point fixe P est un foyer du lieu cherché, et un foyer multiple qui doit compter pour $(m + n)$ foyers réels.

La droite PI a encore m de ses points de rencontre, avec la courbe A, confondus au point I ; la perpendiculaire en ce point à PI est indéterminée. Pour voir ce qui a lieu, considérons sur une des branches de la courbe A, par exemple sur celle qui est caractérisée par le foyer sin-

gulier G, un point K infiniment voisin du point I. Joignons PK, puis menons en K la perpendiculaire à cette droite; cette perpendiculaire, étant à la limite une droite isotrope, le point réel qu'elle contient sera, à la limite, un foyer du lieu cherché. D'un autre côté, la droite IK s'écarte infiniment peu de la tangente en I à la branche considérée de la courbe A; elle coupe donc la droite réelle PG en un point k infiniment voisin du point G. La droite KJ, s'écartant infiniment peu de la droite de l'infini, coupe PG en un point k' infiniment voisin de cette droite. Soit H le point où la perpendiculaire en K à la droite PK coupe KG, l'on voit facilement que les quatre points P, H, k, k', forment un système de points harmoniques, on a donc la relation suivante:

$$\frac{\mathrm{P}k}{\mathrm{P}k'} : \frac{\mathrm{H}k}{\mathrm{H}k'} = -1,$$

d'où en passant à la limite PG = GH.

On voit que le point H s'obtient en joignant le point P au foyer singulier G et en prolongeant la droite PG d'une longueur égale à elle-même.

En considérant la branche de courbe, passant au point J, qui correspond au même foyer singulier G, on obtiendrait aussi une tangente isotrope au lieu cherché passant par H; donc ce point est un foyer de la courbe C.

6. En réunissant les résultats obtenus précédemment, l'on arrive au résultat suivant:

« La courbe C, définie comme ci-dessus, est de » $2(m+n)^{\text{ième}}$ classe; elle a :

« 1° n foyers situés à l'infini et sur des directions per- » pendiculaires aux n asymptotes de la courbe A qui ne sont » pas isotropes;

« 2° Un foyer multiple au point fixe P, qui compte pour » $(m+n)$ foyers;

« 3° m autres foyers H, H', etc., que l'on obtient en joi- » gnant le point P aux foyers singuliers de la courbe A, et » en prolongeant d'une longueur égale à elle-même chacune » des droites ainsi obtenues.

7. Je vais appliquer ce résultat à la recherche de la rela-

tion qui existe entre les différents points d'intersection d'une courbe et d'un cercle. J'ai donné cette relation dans ma note intitulée *Théorèmes généraux sur les courbes algébriques*, qui a été insérée dans les *Comptes Rendus* (janvier 1863). Je la reproduirai ici en la présentant sous une forme plus commode.

Etant donné un système de n droites situées dans un plan, et un axe fixe dans ce plan, si l'on fait la somme des angles que fait chacune de ces droites avec l'axe fixe, la somme de ces angles (somme qui sera déterminée à un multiple près de π) mesurera ce que j'appelle l'*orientation* du système des droites relativement à l'axe fixe. Le système étant représenté, par exemple, par A, je désignerai simplement son orientation par rapport à un axe donné par la notation (A). Si deux systèmes de droites A et B ont une même orientation, ce que l'on exprimera par la relation :

$$(A) = (B)$$

il est clair que cette propriété subsistera quel que soit l'axe fixe que l'on ait choisi comme terme de comparaison.

Ceci posé, soit une couche algébrique B de degré p, ne passant pas d'ailleurs par les ombilics, en sorte qu'elle n'a pas de foyers singuliers. Coupons cette courbe par un cercle quelconque; les $2p$ points d'intersection peuvent toujours se distribuer deux par deux sur p droites réelles (dans cette note, je ne m'occupe exclusivement que de courbes réelles ou du moins ayant une équation réelle), et cela pourra se faire de plusieurs manières, s'il y a plus de deux points d'intersection réels. Le théorème que j'ai donné dans les *Comptes-Rendus* peut alors s'énoncer ainsi : « L'orienta- » tion du système formé par ces p droites réelles est la même » que l'orientation du système formé par les asymptotes » de la courbe B. » Cette orientation est évidemment constante, et lorsqu'on la connaît, on peut, étant donnés $(2p-1)$ des points d'intersection, construire le dernier point.

8. Je considère maintenant une courbe A, telle que celle que j'ai examinée ci-dessus, possédant m foyers singuliers G, G', etc. et n asymptotes non isotropes, en sorte que son degré est égal à $2m + n$.

Un cercle quelconque la coupe en $2(m+n)$ points distincts des ombilics; soit d un quelconque de ces points. Prenons sur ce cercle un point arbitraire P et désignons par Q le point diamétralement opposé à P; considérons enfin la courbe C, dont j'ai déterminé les foyers dans le § 6, et qui est l'enveloppe du côté d'un angle droit dont le deuxième côté s'appuie sur P, tandis que son sommet parcourt la courbe A. Il est clair que la droite Q d et les droites analogues sont les diverses tangentes que l'on peut mener à la courbe C par le point Q.

Je rappellerai un théorème que j'ai donné dans ma note *sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes*, insérée dans le *Bulletin de la Société philomathique* (février 1867), théorème qui peut s'énoncer ainsi : « Si par un » point Q pris dans le plan d'une courbe réelle de classe » n, on mène les n tangentes à la courbe, l'orientation du » faisceau formé par ces tangentes est la même que celui » du faisceau formé par les droites qui joignent le point Q » aux foyers de la courbe. »

Appliquons ce théorème ; désignons par (Q d) l'orientation du faisceau de droite formé par Q d et les droites analogues, par (Q P) l'orientation du faisceau formé par les $(m+n)$ droites coïncidant avec Q P, par (Z) l'orientation du faisceau formé par les droites menées par Q parallèlement aux n asymptotes de la courbe A qui ne sont pas isotropes, par (Q H) l'orientation du faisceau formé par la droite QH et les droites analogues, nous obtiendrons la relation

$$(\mathrm{Q}d) = (\mathrm{QP}) + (\mathrm{QH}) + (\mathrm{Z}) + \frac{n\pi}{2},$$

ou bien

$$(\mathrm{Q}d) - (\mathrm{QP}) - \frac{n\pi}{2} = (\mathrm{QH}) + (\mathrm{Z}).$$

Imaginons maintenant un système de $(m+n)$ droites réelles passant par les $2(m+n)$ points d'intersection du cercle et de la courbe A, et soit (T) son orientation, il est facile de voir que l'on a

$$(\mathrm{T}) = (\mathrm{Q}d) - (\mathrm{QP}) - (m+n)\frac{\pi}{2}.$$

Transportons, parallèlement à eux-mêmes, de sorte que leur orientation ne change pas, les faisceaux entrant dans le second membre de la relation ci-dessus, en leur donnant comme sommet commun le centre R du cercle. Par suite de la position relative des points H, H', etc., et G, G', etc., on voit qu'au lieu du faisceau formé par les droites allant du point Q aux points H, H', etc., nous aurons à considérer le faisceau formé par les droites allant du point R aux points G, faisceau dont je désignerai l'orientation par (R G); le deuxième faisceau reste toujours composé des parallèles aux asymptotes et la relation donnée ci-dessus peut s'écrire ainsi

$$(T) = (RG) + (Z) + \frac{m\,\pi}{2}$$

d'où le théorème suivant :

Théorème. « Etant donnée une courbe algébrique, ayant » m foyers singuliers et de degré $2\,m + n$, un cercle quel- » conque la coupe en $2\,(m + n)$ points distincts des ombi- » lics. Si l'on imagine un faisceau de $(m + n)$ droites » réelles passant par ces points d'intersection, l'orientation » de ce faisceau diffère de m angles droits de l'orientation » du faisceau formé par les n asymptotes de la courbe qui » ne sont pas des droites isotropes, et par les m droites qui » joignent le centre du cercle aux foyers singuliers de » la courbe. »

Séance du 5 décembre 1868.

PRÉSIDENCE DE M. LAURENT.

M. Berthelot rend compte de travaux sur la préparation du *potassium*.

M. A. Dugès est nommé membre correspondant.

Séance du 12 décembre 1868.

PRÉSIDENCE DE M. LAURENT.

M. Vallès décrit un appareil de M. de Caligny, destiné à remonter une partie de l'eau du sas d'une écluse dans le bief d'amont.

Résultats d'expériences sur l'effet utile du nouveau système d'écluses de navigation inventé par M. de Caligny et exécuté à l'écluse de l'Anbois, sur le canal latéral à la Loire, par M. Vallès.

La chute de l'écluse de l'amont à l'aval étant de $2^m,40$, l'appareil a relevé au bief d'amont une tranche d'eau de 926 millimètres d'épaisseur, une tranche d'eau de 810 millimètres étant descendue au bief d'aval. Cette opération s'est faite en douze périodes et a duré en tout cinq minutes et demie. Le niveau de l'eau s'est ainsi abaissé dans l'écluse de $1^m,736$, et il n'est resté que 66 centimètres de hauteur d'eau dans le sas. On a alors arrêté l'appareil, on a levé le tube mobile d'aval, et l'on a fait passer par une grande oscillation dans la rigole de décharge, momentanément transformée en bassin d'épargne par une porte de flot, une tranche d'eau de 50 centimètres de hauteur, qui a relevé de 31 centimètres le niveau de l'eau dans cette rigole de décharge au-dessus de celui du bief d'aval. Il n'est resté dans le sas que 16 centimètres de hauteur d'eau à écouler par les moyens ordinaires. En définitive, il n'est passé au bief d'aval qu'une tranche d'eau d'une hauteur de 97 centimètres. Il est vrai que la quantité de liquide entrée ainsi dans la rigole de décharge, momentanément transformée en bassin d'épargne, ne peut rentrer toute entière par une seule grande oscillation dans le sas, quand on veut ensuite remplir celui-ci. Sans entrer pour le moment dans les détails nécessaires pour montrer comment cette eau peut être convenablement utilisée en entier, on va d'abord montrer toute l'importance du résultat obtenu au moyen du jeu de la machine proprement dite.

Abstraction faite des écluses, il est intéressant d'apprécier l'effet utile de l'appareil, considéré comme machine à élever de l'eau, dans des circonstances exceptionnellement désavantageuses, puisqu'à chaque période la hauteur à laquelle l'eau doit être élevée au-dessus de son niveau augmente, tandis que la chute motrice diminue. Si l'on suppose tout entière à la hauteur de son centre de gravité la tranche d'eau de $1^m,74$ sortie de l'écluse pendant le jeu de la machine, on peut considérer la hauteur de ce centre de gravité au-dessus du niveau du bief d'aval comme étant celle de la chute motrice, tandis que la hauteur des sommets des tubes mobiles à l'état de repos au-dessus de celle de ce centre de gravité sera la hauteur de versement de l'eau élevée. Si donc on ajoute aux 66 centimètres restés dans le sas 87 centimètres, la chute motrice sera de 153 centimètres. Le sommet des tubes est à 15 centimètres au-dessus du niveau normal du bief d'amont. La hauteur moyenne de versement est donc de 87 centimètres, plus 15 centimètres, ce qui fait 102 centimètres. L'effet utile est donc :

$$\frac{102}{153} \times \frac{0,926}{0,810} = 0,76$$

L'effet utile approche donc beaucoup des quatre cinquièmes *en eau élevée*. Ce résultat confirme donc l'effet utile le plus grand de l'appareil à tube oscillant de M. de Caligny à l'île de Billancourt. (Voir le tableau officiel des expériences de la Commission impériale sur cette machine, pages 100 et 101 du tome XII des rapports du jury international.)

M. Vallès n'a pas encore fait d'expériences précises sur la quantité d'eau retirée du bief d'aval par l'appareil, pendant le remplissage de l'écluse. Mais il est évident que les phénomènes sont tout à fait de la même nature, et que, même pour le remplissage, on n'a pas le désavantage d'être obligé de relever l'eau plus haut que cela n'est nécessaire, comme il l'a fallu pour la vidange, à cause des variations très-grandes du niveau du bief d'amont dans la localité dont il s'agit. Ceci ne concerne d'ailleurs que l'appareil considéré comme machine élévatoire; quant à ce qui est relatif à l'épargne de l'eau dans les canaux, M. Vallès a établi que,

tandis que dans la pratique actuelle ordinaire le passage de chaque bateau exige le rejet vers l'aval de la totalité d'une éclusée, avec le jeu de l'appareil, et sans profiter du bénéfice des oscillations initiales et finales, il suffira d'une dépense d'eau qui ne sera que les 23 centièmes de la précédente, dépense qui sera même réduite aux 15 centièmes seulement si au fonctionnement de l'appareil on ajoute l'économie produite par les oscillations du commencement et de la fin.

Ces résultats d'expérience font comprendre avec combien d'avantages on pourra appliquer les appareils de M. de Caligny aux canaux pour lesquels les approvisionnements d'eau sont insuffisants.

Séance du 19 décembre 1868.

PRÉSIDENCE DE M. LAURENT.

M. Laussedat expose les découvertes récentes de M. Janssen sur les protubérances du Soleil.

M. Laguerre fait une communication sur l'intégration d'une certaine classe d'équations différentielles simultanées de premier ordre.

Séance du 26 décembre 1868.

PRÉSIDENCE DE M. LAURENT.

M. Transon présente des considérations sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires.

TABLE DES MATIÈRES.

Sur une nouvelle turbine, par M. de Caligny..... 1
Sur la courbure des surfaces, par M. Gilbert..... 3
Sur le problème des remous, par M. de Saint-Venant..... 9
Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques, par M. Laguerre..... 17
Sur la condition de l'élimination de l'erreur de lecture d'un cercle gradué provenant du jeu des tourillons dans les coussinets, par M. Wolf..... 22
Sur un principe de la théorie des surfaces, par l'abbé Aoust..... 24
Sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères, par M. Ribaucour..... 30
Sur un appareil à élever l'eau au moyen d'une chute d'eau, par M. de Caligny..... 35
Sur le puits artésien de la place Hébert à La Chapelle, par M. Laurent..... 37
Sur les cassiniennes planes et sphériques, par M. Laguerre..... 40
Sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiques, par M. Laguerre..... 48
Sur le déplacement d'une figure de forme invariable, nouvelle méthode de normales, applications diverses, par M. Mannheim..... 52
Sur les inondations, par M. Dausse..... 61
Sur le tantochronisme des épicycloïdes, par M. Haton de la Goupillière..... 64
Sur les courbes gauches résultant de l'intersection de deux surfaces du second ordre, par M. Laguerre..... 65
Sur des essais d'éclairage pour l'analyse des stries des Diatomées, par M. Frémineau..... 70
Sur un nouveau mode de transformation des figures, par M. Darboux. 72
Sur la construction de la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points, par M. Darboux..... 77
Sur les épicycloïdes, par M. Fouret..... 80
Sur l'anatomie de l'Autruche d'Afrique, par M. Alix..... 97
Sur la théorie des surfaces, par M. l'abbé Aoust..... 102
Sur un nouveau moyen de faciliter la marche automatique d'un nouveau système d'écluses de navigation, par M. de Caligny..... 106
Quelques remarques sur les lignes et sur les surfaces réciproques et caustiques, par M. Habich..... 108
Sur quelques propriétés générales des courbes algébriques et sur leur application à la théorie des courbes et des surfaces anallagmatiques, par M. Laguerre..... 112
Résultats d'expériences sur l'effet utile du nouveau système d'écluses de navigation inventé par M. de Caligny, par M. Vallès..... 121

IMP. CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET C°, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 2900-9.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS.

Séance du 9 janvier 1869.

PRÉSIDENCE DE M. LAURENT.

M. Ribaucour fait une communication sur les surfaces orthogonales.

M. Hamy présente le résultat de ses recherches sur l'ossification de l'os malaire chez l'homme; il signale au troisième mois de la vie intra-utérine trois points d'ossification : un antérieur, un supérieur, un inférieur; les deux premiers se soudent d'abord, puis le troisième qui reste quelquefois longtemps distinct et qui peut même être distinct pendant toute la vie.

M. Marey est nommé président pour le premier semestre de 1869.

Sur les surfaces orthogonales, par M. Ribaucour.

Lorsque des sphères ont leurs centres sur une surface, on peut considérer le rayon comme une fonction des coordonnées du centre, soit :

$$R^2 = -2\,F\,(\rho, \rho_1)$$

où R désigne le rayon d'une sphère dont le centre a pour coordonnées ρ et ρ_1, qui sont par exemple les paramètres des lignes de courbure. Le ds^2 de la surface pourra s'écrire:

$$ds^2 = H^2\, d\rho^2 + H_1^2\, d\rho_1^2.$$

En général, les droites qui joignent les points de contact de chacune des sphères avec leur enveloppe ne sont pas normales à une surface; et pour que cela ait lieu, il faut que l'on ait :

$$(1) \qquad \frac{d^2 F}{d\rho\, d\rho_1} = \frac{dF}{d\rho}\frac{1}{H}\frac{dH}{d\rho_1} + \frac{dF}{d\rho_1}\frac{1}{H_1}\frac{dH_1}{d\rho};$$

or, si l'on considère un système triplement orthogonal tel que

$$ds^2 = H^2\, d\rho^2 + H_1^2\, d\rho_1^2 + H_2^2\, d\rho_2^2$$

la fonction H_2 substituée dans l'équation (1) donne précisément l'une des six équations auxquelles satisfont les fonctions H, H_1, H_2; de plus, le produit de F par une constante satisfait aussi à l'équation (1). Donc, à tout système triplement orthogonal correspondent une infinité d'enveloppes de sphères dont les cordes de contact sont normales à une surface et sont donnéés par l'équation

$$R^2 = -2\, k\, H_2$$

où k prend toutes les valeurs possibles. Par exemple, au système déduit par rayons vecteurs réciproques de celui formé par une famille de surfaces parallèles et par leurs développables orthogonales, correspondent des anallagmatiques et les surfaces qui en dérivent.

L'équation (1) peut s'intégrer complétement sur certaines surfaces, par exemple sur celles dont toutes les lignes de courbure sont des cercles géodésiques pour lesquelles le ds^2 peut s'écrire :

$$ds^2 = \frac{1}{(H + H_1)^2}(d\rho^2 + d\rho_1^2)$$

où H est une fonction de ρ seulement, et H_1 de ρ_1; on a alors :

$$F = \frac{f(\rho) + \varphi(\rho_1)}{H + H_1}$$

f et φ étant deux fonctions arbitraires.

Au lieu de considérer R comme une fonction de ρ et ρ_1 seulement, on peut le regarder aussi comme fonction de ρ_2; et, si l'équation (1) est vérifiée, on aura pour chacune des surfaces (ρ_2) une série de sphères dont les cordes de contact sont normales à des surfaces.

Il est naturel de se demander dans quelles conditions les surfaces normales aux cordes de contact feront partie d'un système triplement orthogonal; or, on trouve que cela a lieu lorsque l'équation (1) subsistant :

$$(2) \qquad \frac{d^2 F}{d\rho_1 d\rho_2} = \frac{dF}{d\rho_1}\,\frac{1}{H_1}\,\frac{dH_1}{d\rho_2} + \frac{dF}{d\rho_2}\,\frac{1}{H_2}\,\frac{dH_2}{d\rho_1}$$

$$(3) \qquad \frac{d^2 F_1}{d\rho_2\, d\rho} = \frac{dF}{d\rho_2}\,\frac{1}{H_2}\,\frac{dH_2}{d\rho} + \frac{dF}{d\rho}\,\frac{1}{H}\,\frac{dH}{d\rho_2}$$

Nous avons vu tout à l'heure que la fonction H_2 substituée dans l'équation (1) la rendait identique; si substituée dans (2) et (3) elle conduisait encore à deux identités, il en résulterait que l'on connaîtrait immédiatement un système orthogonal déduit du premier sans aucune intégration.

Or les équations (2) et (3) dans lesquelles on remplace F par H_2 expriment que les trajectoires orthogonales des surfaces (ρ_2) sont des cercles; il en résulte que le système triplement orthogonal considéré doit contenir deux séries d'enveloppes de sphères.

Or, maintenant si l'on cherche quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux séries d'enveloppes de sphères orthogonales soient normales à une surface donnée, on trouve que le H_2 satisfait à la seule équation :

$$\frac{d^2 H_2}{d\rho\, d\rho_1} = \frac{dH_2}{d\rho}\,\frac{1}{H}\,\frac{dH}{d\rho_1} + \frac{dH_2}{d\rho_1}\,\frac{1}{H_1}\,\frac{dH_1}{d\rho};$$

c'est-à-dire qu'à toute fonction H_2 satisfaisant à cette équation correspond une double série d'enveloppes de sphères orthogonales, faisant partie d'un système triplement orthogonal ; la multiplication de H_2 par une constante ne donne plus rien. Mais il résulte de ce qui précède qu'à toute enveloppe de sphères dont les cordes de contact sont normales à une surface correspond un système orthogonal particulier. A ce système particulier en correspond un autre que l'on obtient sans aucune intégration lorsque le premier est complétement défini ; enfin à ces deux systèmes en correspondent une infinité d'autres que l'on obtient en intégrant deux équations. Il est facile de voir que tous les systèmes ainsi obtenus jouissent tous de cette propriété de comprendre deux séries d'enveloppes de sphères orthogonales.

Il résulte aussi de ce qui précède que, si l'on a des surfaces (ρ_2) faisant partie d'un système triplement orthogonal, les cercles osculateurs des trajectoires orthogonales de ces surfaces, tout le long de l'une d'entre elles, sont orthogonaux eux-mêmes à une série de surfaces faisant partie d'un système triplement orthogonal. Ce système est osculateur au premier tout le long de la surface (ρ_2).

Si des cercles sont orthogonaux à des surfaces faisant partie d'un système triplement orthogonal, le lieu des centres de courbure principaux de ces surfaces, tout le long d'un des cercles, se compose de deux droites situées dans le plan du cercle même.

Tous ces cercles enveloppent quatre surfaces qu'ils touchent aux points où ils sont rencontrés par les deux droites dont il vient d'être question.

Les plans tangents aux points où un cercle touche ses surfaces enveloppes sont situés deux d'un côté du plan du cercle, deux de l'autre ; deux plans situés du même côté de ce plan font avec lui des angles égaux ; des angles situés de côtés différents font des angles complémentaires.

Cette dernière propriété appartient d'ailleurs à toutes les courbes planes trajectoires orthogonales d'une série de surfaces faisant partie d'un système triplement orthogonal.

On ne connaissait jusqu'à présent que deux systèmes triplement orthogonaux déduits d'une surface donnée : le système contenant les surfaces parallèles à la proposée, et le

transformé par rayons vecteurs réciproques de celui-ci. Les considérations précédentes nous en fournissent d'autres sans aucune intégration. En effet, si l'on prend une anallagmatique on sait que ses cordes de contact passent par un même point; donc, à toute anallagmatique correspond un système triplement orthogonal. Si l'une des nappes de l'anallagmatique se réduit à un point, on tombe alors sur le second des systèmes connus. Mais dans le cas d'une anallagmatique générale on obtient de nombreux systèmes dont la définition géométrique est assez simple.

De même à tout système triplement orthogonal contenant deux systèmes développés de sphères correspondent le long d'une trajectoire de celle-ci d'autres systèmes triplement orthogonaux que l'on obtient sans aucune intégration.

Séance du 16 janvier 1869.

PRÉSIDENCE DE M. LAURENT.

Nouvelle communication de M. Ribaucour sur les surfaces orthogonales.

M. Hamy développe ses études sur l'os intermaxillaire et sur son rôle dans la production du bec-de-lièvre.

Le Société décide qu'à l'avenir ses séances seront tenues le deuxième et le quatrième samedi de chaque mois.

Séance du 23 janvier 1869.

PRÉSIDENCE DE M. MAREY.

M. Vaillant rend compte de ses observations sur la vitalité des Eponges.

M. Dehérain présente des recherches sur les différences des sensations de couleur perçues par divers points de la rétine.

Séance du 13 février 1869.

PRÉSIDENCE DE M. MAREY.

M. Ribaucour fait une communication sur un sujet de géométrie.

M. Transon expose les lois relatives à la courbure dans certaines transformations des courbes planes.

Sur les lois relatives à la courbure dans certaines transformations des courbes planes, par M. Abel Transon.

On sait que Cauchy, dans une note insérée au tome XXII des *Mémoires de l'Académie des sciences* (1850), renonce formellement à la théorie qu'il avait donnée des expressions imaginaires dans son *Cours d'analyse algébrique* (1821), et qu'adoptant pour ces expressions l'interprétation géométrique proposée depuis longtemps par plusieurs mathématiciens, il expose à cette occasion les principes du calcul que Mourey, en 1828, avait appelé *calcul directif*; calcul dont M. Bellavitis (de l'université de Padoue) avait, de son côté, donné les règles en grand détail et dont il avait fait de nombreuses et intéressantes applications dans ses mémoires *sur les Equipollences* (années 1832, 1835, etc.).

Une équation à deux variables étant interprétée selon les principes de ce calcul donne lieu à un spectacle géométrique d'une variété infinie. Car si on suppose que l'extrémité de la variable indépendante trace sur le plan une figure quel-

conque, les extrémités de chacune des valeurs correspondantes de l'autre variable décrivent des figures qu'on peut appeler les *transformantes* de la première.

Cette remarque ingénieuse a été présentée, en 1846, à la Société philomathique, par M. Faure, professeur de mathématiques au collége d'Embrun, et il en résultait le problème de chercher les relations des figures *transformantes* soit entre elles, soit avec la figure primitive dite *la transformée*. Et, par exemple, il fut établi dès cette époque ce fait bien connu, que toute région infiniment petite autour d'un point de la transformée est représentée par une région semblable autour du point correspondant de chacune des transformantes. Mais il ne paraît pas que, depuis lors, on se soit avisé de rechercher les lois relatives à la correspondance entre les éléments du second ordre, c'est-à-dire entre le rayon de courbure de la figure primitive et ceux de ses transformantes. Or, l'expression de ces lois se résume dans les deux théorèmes suivants :

Théorème I. *Toutes les droites qui passent par un même point de la figure primitive ont pour transformantes des courbes dont les centres de courbure relatifs au point correspondant sont sur une droite.*

Théorème II. *Si plusieurs courbes passant en un point* a *de la figure transformée ont en ce point le même rayon de courbure* ρ, *les rayons de courbure correspondants de toutes les transformantes seront les rayons vecteurs d'une même conique ayant pour foyer le point* A, *transformant du point* a. *De plus, cette conique variera d'espèce avec la valeur de* ρ ; *mais sa directrice sera fixe, étant la droite à laquelle se réduit la conique elle-même lorsque les transformées sont des lignes droites, c'est-à-dire lorsque* ρ *est infini.*

Il y a ensuite des rapprochements curieux à faire entre la transformation des figures sphériques par leur projection stéréographique et la transformation des figures planes au moyen d'une équation à deux variables interprétée selon les règles du calcul directif. En effet, on sait déjà que la région sphérique infiniment petite autour d'un point est semblable à la région qui lui correspond en projection ; mais de plus on a les deux théorèmes suivants :

Théorème I. *Tous les grands cercles qui passent par un*

même point de la sphère ont pour projections des cercles dont les centres sont en ligne droite.

Théorème II. *Si plusieurs cercles de même rayon* ρ *passent par un même point de la sphère, les centres des cercles qui leur correspondent en projection stéréographique sont sur une même conique dont l'espèce dépend de la grandeur de* ρ.

Séance du 27 février 1869.

PRÉSIDENCE DE M. MAREY.

M. Alix montre à la Société un crâne de Papion portant des traces d'une altération pathologique du tissu osseux.

M. Marey présente une étude sur la forme des muscles des Oiseaux en rapport avec leurs fonctions.

Séance du 13 mars 1869.

PRÉSIDENCE DE M. MAREY.

M. Vallès fait une communication sur le système des écluses de M. de Caligny.

M. Hamy rend compte de ses recherches sur les sinus du crâne et de la face chez le Gorille.

M. de la Gournerie expose les propriétés de la spirique à centre.

M. Ribaucour présente des observations sur les longueurs d'arcs et le mouvement d'une figure dans son plan.

Sur l'effet utile de l'appareil de M. de Caligny appliqué aux écluses de navigation, par M. Vallès.

Dans la communication que j'ai faite à la Société le 12 décembre 1868, j'ai dit que le temps m'a manqué pour étudier en détail l'effet utile produit par l'appareil de M. de Caligny pendant l'opération de remplissage du sas.

J'ai toutefois présenté diverses observations qui tendent à prouver que pendant cette dernière opération l'effet obtenu doit être plus grand que pendant la vidange. Ces observations ne sont pas seulement théoriques; elles s'appuient en outre sur des résultats d'expériences obtenus en faisant passer, en dehors du jeu de l'appareil, et par voie de simple oscillation, le liquide soit du sas dans le bassin d'épargne, soit du bassin d'épargne dans le sas.

L'examen de ce qui a lieu pendant ces oscillations montre clairement, ainsi que je l'ai expliqué, que l'effet est sensiblement plus considérable lorsque l'eau vient du bassin d'épargne dans le sas que lorsqu'au contraire elle se rend du sas dans le bassin d'épargne. J'ai fait observer en outre que, pendant la vidange, l'eau jetée à l'amont est obligée de remonter plus haut qu'il ne faudrait, à cause de la surélévation que, par suite de circonstances purement locales, on a dû donner aux rebords des tubes, inconvénient qui n'existe pas pour les eaux qui, pendant le remplissage, sont prises à l'aval.

C'est à la suite de ces considérations que j'ai conclu que l'effet utile, pendant le remplissage, devait être plus considérable que pendant la vidange, que, dans tous les cas, on pécherait plutôt par défaut que par excès en admettant que les deux effets sont égaux.

Je n'en ai pas moins regretté que des expériences directes ne m'eussent pas permis d'être plus affirmatif à cet égard. Mais aujourd'hui cette lacune vient d'être comblée par les observations qui ont été faites tout récemment à l'écluse de l'Anbois par M. Perrault, conducteur des ponts et chaussées.

M. Perrault a été mon collaborateur pendant les six jours que j'ai employés à étudier l'appareil de M. de Caligny; il a suivi avec le zèle le plus louable et avec beaucoup d'intelligence toutes mes opérations, il est entré dans tous les détails du jeu de l'appareil et possède la connaissance complète de la marche à suivre pour le manœuvrer.

Or, il vient tout récemment de procéder à des expériences de remplissage dont je vais faire connaître les résultats. Après quelques essais préliminaires qui ont eu pour objet, soit de se familiariser lui-même avec une marche parfaitement régulière de la machine, soit de bien dresser l'éclusier, ce premier point étant acquis, il a fait deux opérations de remplissage.

Dans la première, en neuf périodes, il a obtenu par le fonctionnement de l'appareil le remplissage du sas jusqu'à une hauteur de $1^m,60$, la chute de l'amont à l'aval étant au début de $2^m,44$. La quantité d'eau prise à l'amont est représentée dans cette opération par une tranche de $0^m,595$, tandis que celle venue de l'aval a pour mesure une hauteur de $1^m,005$.

Dans la seconde, la chute initiale étant de $2^m,43$, le jeu de l'appareil a rempli le sas jusqu'au niveau de $1^m,59$. Le nombre de périodes a été également de neuf. L'eau prise à l'amont est représentée dans ce cas par une tranche de $0^m,590$ de hauteur, et celle venue de l'aval par une tranche de $1^m,000$.

Ainsi, pendant que, dans la vidange, l'eau relevée à l'amont a eu pour mesure 0,926, celle prise à l'aval, dans le remplissage, a été de 1,002. Celle-ci a donc un effet supérieur à la première, ainsi que nous l'avions prévu.

Comparant cette tranche à la hauteur totale de l'éclusée, on obtient pour l'épargne pendant le remplissage le rapport 0,421; le rapport analogue pendant la vidange étant 0,385, on a définitivement le nombre 0,805, soit les $\frac{4}{5}$ de l'éclusée comme mesure de l'économie réalisée.

Si l'on considère l'appareil comme machine élévatoire, son effet utile, mesuré d'après les résultats obtenus dans ces expériences, a pour valeur 0,825 au lieu de 0,76 que nous avons trouvé pour le cas de la vidange.

Les expériences de M. Perrault font donc disparaître la

lacune que nous regrettions, en même temps qu'elles corroborent toutes nos conclusions.

Sur la spirique à centre, par M. de la Gournerie.

M. Garlin a démontré que la courbe lieu des points de rencontre des tangentes à une conique qui comprennent un angle donné était identique avec la section d'un tore par un plan parallèle à son axe. Le lieu dont M. Garlin s'est occupé est, en effet, la spirique à centre; cette courbe appartient à douze tores, dont huit ont le même centre qu'elle, tandis que les quatre autres ont leurs axes parallèles à son plan.

Une spirique à centre étant donnée, on peut déterminer deux coniques telles que les tangentes menées à l'une d'elles d'un point quelconque de la courbe comprennent un angle donné. Ces coniques sont de genres différents; l'hyperbole a pour asymptotes les diagonales du rectangle circonscrit à l'ellipse.

Toutes les fois que deux coniques de genres différents ont entre elles les relations qui viennent d'être indiquées, il existe une spirique à centre telle que les tangentes menées de ses divers points à l'une quelconque des deux coniques comprennent un angle constant.

L'ensemble des deux coniques représente une courbe de la quatrième classe, ayant quatre foyers réels et douze imaginaires. Ces foyers coïncident avec ceux de la spirique. Quand les foyers réels de cette courbe sont sur les axes, ils sont les foyers des coniques; lorsqu'ils se trouvent en dehors des axes, les carrés des axes des coniques et leurs foyers sont imaginaires.

Les foyers singuliers de la spirique sont les centres des cercles décrits sur le segment compris entre les deux foyers d'une conique, et capable de l'angle compris entre les tangentes d'un même couple. Cette proposition peut être déduite d'un théorème plus général donné par M. Laguerre.

Sur les longueurs d'arcs et le mouvement d'une figure dans son plan, par M. Ribaucour.

I.

Un angle droit ABC se meut dans son plan de telle sorte que le sommet B décrive la courbe (B); que les côtés AB et BC, enveloppent les courbes (A) et (C); (F) est la développée de (A).

Désignons par ρ la longueur AB, par $d\omega$ l'angle de contingence de (A); par (A) (B) (C) (E) les longueurs correspondantes des arcs de courbe du même nom, on a les deux formules :

$$BC - B_0 C_0 = \int_{\omega_0}^{\omega} \rho \, d\omega - (c)$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \rho \, d\omega - \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right) + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)_0 = (c) - (E) .$$

Les propositions de ce premier chapitre sont des conséquences de cette formule.

Supposons que (C) soit une courbe fermée, et que, de chacun des points tels que C, comme centres, on décrive des cercles ayant pour rayons les différentes valeurs de ρ :

(1) La demi-différence des arcs complets de l'enveloppe des cercles est égale à la longueur de la ligne (C).

(2) Si de chacun des points d'une courbe (A) comme centre, on décrit un cercle dont le rayon élevé au carré soit égal à l'aire de cette courbe évaluée en coordonnées polaires [(E) désignant toujours la développée de (A)], les cordes de contact de ces cercles et de leur enveloppe sont tangentes à une courbe (S) et l'on a :

$$(S) - (D) = \frac{(A)}{4} .$$

Si (A) est un cercle, (S) est aussi un cercle.

(3) Soit une courbe (A) quelconque, et deux axes rectangulaires ox, oy situés dans son plan.

D'un point A de (A), on abaisse des perpendiculaires Ax et Ay sur ox et oy; par les pieds x et y de ces droites, on mène des parallèles à la tangente en A à (A), ces droites enveloppent des courbes (x) et (y) ; la somme algébrique des arcs de (x) et de (y) correspondant à un arc de (A) est égale à la longueur de cet arc.

(4) Si du point A comme centre, avec un rayon dont le carré est égal à l'aire de (A) (évaluée relativement aux droites ox, oy), on décrit des cercles, leurs cordes de contact vont envelopper une courbe (S) et l'on a :

$$(S) - (E) = \tfrac{1}{2}\,[(A) - (x)]$$

(E) désignant toujours la développée de (A).

Je me borne à ces applications, on en pourrait faire à volonté un très-grand nombre.

II.

Ce qui va suivre est relatif au mouvement le plus général d'une figure dans son plan.

(1) Une courbe (α) entraîne une courbe (B) en roulant sur une droite et à l'intérieur d'une courbe, dont le rayon de courbure est à chaque instant moitié du sien ; les lieux des positions successives des points de contact des tangentes à (B) issues des différents points de (α) ont même longueur dans les deux cas.

(2) Soient deux courbes (A) et (Q) [les tangentes aux points correspondants étant rectangulaires], si l'on porte sur la tangente à (Q), à partir du point (Q), une longueur égale au rayon de courbure de (A) en (A), et en sens inverse de celui-ci, la transformée du lieu (B) de l'extrémité de ce segment, lorsque (A) roule sur une droite, a son arc égal à l'arc correspondant de la courbe, lieu des projections des points tels que (B) sur les normales à (A).

(3) Si l'on fait rouler une droite (D) sur une courbe (A), les courbes (S) et (S_1), lieux des points de contact des tangentes menées à deux courbes (C) et (C^1) symétriques par

rapport à (D), des différents centres instantanés de rotation, sont égales.

(4) Une courbe (D) roule à l'intérieur et à l'extérieur d'une courbe (A) en entraînant une courbe (B) quelconque, la somme des arcs enveloppes des positions successives de (B) dans les deux cas est indépendante de la forme de la base (A).

(5) Considérons un arc limité de la roulette, et imaginons que chaque point de cet arc soit le centre d'action d'une force constante proportionnelle à l'angle de rotation correspondant; l'arc donné de la roulette agit alors sur un point matériel en vertu de chacun de ces centres d'action élémentaires; ce système de forces admet une famille de courbes de niveau, qui sont précisément les courbes lieux des points du plan de la roulette qui ont donné lieu à des trajectoires de même longueur.

(6) Lorsqu'un cercle roule sur une courbe quelconque, l'enveloppe d'une droite passant par son centre est une courbe que l'on obtiendrait aussi en cherchant la trajectoire d'un point d'un cercle de rayon moitié de celui du précédent, et roulant sur la même base.

(7) Lorsqu'un cercle roule sur une courbe quelconque, la somme des carrés des arcs décrits par deux points diamétralement opposés du cercle, est indépendante de l'orientation du diamètre.

(8) Lorsqu'une figure se meut d'une manière quelconque dans son plan, pour un mouvement déterminé, toutes les droites de cette figure enveloppent des courbes dont les longueurs sont les mêmes que si tout le système avait tourné du même angle autour d'un certain point de la figure.

III.

Ce chapitre est consacré à l'étude des aires balayées par les droites d'une figure et à celle des podaires.

(1) Lorsqu'une droite d'une figure mobile s'est déplacée de manière à former un certain angle avec sa position primitive, toutes les droites passant par un même point ont balayé des aires qui peuvent être représentées par des quantités proportionnelles aux inverses des carrés des rayons

qu'elles interceptent dans une conique ayant pour centre le point donné. Sur toute droite se trouve un point pour lequel l'aire balayée est un minimum.

Le centre de gravité de la roulette chargée en chacun de ses points d'une masse proportionnelle à l'angle de rotation correspondant, projeté sur une droite quelconque, donne le point à aire minimum de cette droite.

2° Les axes de la conique d'un point sont tangents aux deux coniques passant par ce point et homofocales de celle du centre de gravité.

3° Pour tous les points également éloignés du centre de gravité, la somme des carrés des axes est constante.

4° La différence entre les aires de la podaire d'un arc de courbe et de la podaire de l'arc correspondant de sa développée, est égale à l'aire de la courbe augmentée de la différence entre deux triangles.

On appelle centre de gravité de courbure d'un arc le centre de gravité d'un arc supposé chargé en chacun de ses points d'une masse proportionnelle à l'angle de contingence correspondant.

Pour le centre de gravité de courbure d'un arc la somme des aires de sa podaire et de celle de sa développée est un minimum. Pour tous les points également éloignés du centre de gravité de courbure, la somme analogue est constante.

5° Pour tous les points d'une droite parallèle à la corde qui sous-tend l'arc donné, la différence entre les podaires de l'arc et de l'arc correspondant de sa seconde développée est constante.

IV.

Ce chapitre est consacré aux centres de gravité de courbure.

1° La droite qui joint les centres de gravité de courbure d'un arc et de l'arc correspondant de sa développée est perpendiculaire à la corde qui sous-tend le premier arc, et la longueur de cette corde est égale au produit de la distance des deux centres de gravité par l'angle des normales aux extrémités de l'arc.

2° Dans le mouvement le plus général d'une figure dans son plan, un faisceau de droites concourantes enveloppe des courbes dont les centres de gravité de courbure sont situés sur un même cercle, la distance comptée sur ce cercle de deux centres de gravité de courbure est double de l'angle que font entre elles les droites correspondantes. Tous les cercles, lieux des centres de gravité de courbure de droites formant faisceau, passent par un même point.

3° Le centre de gravité de courbure d'un arc d'ellipse coïncide avec le centre de gravité des quatre foyers de cette courbe, chacun de ces foyers étant chargé d'une masse proportionnelle au produit du carré de l'axe qui le contient par l'angle sous lequel l'arc donné est vu de ce même foyer.

IMP. CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET C° RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 7448-9.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS.

Séance du 3 avril 1869.

PRÉSIDENCE DE M. MANNHEIM.

Communication de M. Transon sur les transformations des figures en général et sur l'homographie en particulier.

M. Moutard expose ses recherches sur un mode particulier de transformation des surfaces.

M. Prillieux présente le résultat de ses travaux relatifs aux propriétés particulières des cellules végétales et aux modifications de ces propriétés produites par la mort.

Séance du 10 avril 1869.

PRÉSIDENCE DE M. ALIX.

M. Vaillant élucide une question de priorité au sujet d'un Cestoïle étudié par M. d'Udekem.

M. Fischer fait part de ses observations sur un cas d'ectopie viscérale observé chez un Mollusque gastéropode.

M. Prillieux complète une communication antérieure sur les modifications des cellules végétales produites par la gelée.

Sur la transformation des figures planes, par M. Abel Transon.

On sait que deux figures sont *homographiques* lorsqu'à un point de l'une d'elles correspond un point de l'autre, et qu'en même temps à chaque droite de l'une correspond aussi une droite de l'autre. Donc, en ne considérant que l'une de ces deux relations, on peut dire que l'*homographie* est un cas particulier du mode de transformation dans lequel, à un point de la première figure, correspond un point de la seconde.

Dans le mode de transformation par correspondance de point à point, il peut arriver que si plusieurs courbes passent par un même point de la figure transformée, les courbes qui leur correspondent dans la seconde figure se rencontrent sous les mêmes angles que les premières. Si cette propriété a lieu pour tous les points du plan transformé, on dit que la transformation est *isogonale*. Elle est *directement* ou *inversement isogonale* selon que les angles correspondants se succèdent dans un même sens de rotation ou dans un sens contraire.

Mais, plus généralement, lorsque plusieurs courbes de la première figure se rencontrent en un même point, le faisceau de leurs tangentes en ce point est directement ou inversement homographique avec le faisceau des tangentes aux courbes correspondantes de la seconde figure. Alors la transformation est *isologique*.

Ainsi la propriété générale des transformations par correspondance de point à point est d'être isologique. La circonstance d'être isogonale est un état plus particulier. Seulement, toute transformation isologique est directement isogonale relativement à certains points du plan, et inversement isogonale relativement à d'autres. Ces points d'une et d'autre sorte sont en nombre limité ou illimité selon la nature des fonctions qui déterminent la transformation.

L'homographie est une transformation isologique; elle est isogonale directe pour un point unique du plan, et isogonale inverse pour un autre point; de là ce résultat :

Théorème : — Deux figures homographiques ont deux

couples de points correspondants, caractérisés par la propriété que deux segments de droite qui se correspondent dans les deux figures, étant vus respectivement des deux centres qui forment un même couple, y sont vus sous des angles égaux. Mais pour les centres de l'un des couples, les extrémités correspondantes des deux segments se suivent dans le même sens de rotation ; et pour ceux de l'autre couple elles se suivent en sens contraire.

Ce théorème se démontre très-facilement si l'on place les deux figures en perspective l'une de l'autre.

Séance du 24 avril 1869.

PRÉSIDENCE DE M. MAREY.

Communication de M. Transon sur la méthode de Mouret.

M. Marey analyse ses nouvelles expériences sur le vol des Oiseaux.

Séance du 8 mai 1869.

PRÉSIDENCE DE M. VAILLANT.

M. Hamy présente le résultat de ses recherches sur une loi particulière des anomalies crâniennes relativement à la classification des races humaines.

M. Moutard fait une communication sur un mode particulier de transformation des surfaces.

M. Ribaucour développe le théorème suivant : Les polaires des trajectoires orthogonales des génératrices d'une surface gauche, relatives à une génératrice, sont hyperboloïdes.

Séance du 22 mai 1869.

PRÉSIDENCE DE M. MAREY.

M. Vaillant décrit une monstruosité par soudure de deux individus, observée sur un Entozoaire de l'Homme.

M. Guillemin donne des détails sur un nouveau condensateur.

Sur une monstruosité d'un Tœnia de l'Homme, par M. Léon Vaillant.

Si les monstruosités chez l'Homme et les animaux supérieurs ont déjà donné lieu à un grand nombre d'importants travaux, il n'en est pas de même chez les Invertébrés, qui jusqu'ici n'ont guère été l'objet que d'observations isolées. Le fait que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à la Société viendra s'ajouter à ces dernières qui permettront peut-être, étant reprises un jour, d'arriver à des résultats plus complets.

L'animal qui en a été l'objet m'a été remis par M. J. Chatin et provenait d'un malade venu en consultation à l'Hôtel-Dieu pour se faire débarrasser de ce parasite incommode.

C'est un Ver cestoïde se rapportant très-évidemment au genre *Tœnia* et soit au *T. solium*, soit au *T. mediocanellata*; mais, vu l'état incomplet des pièces et la disposition anormale des anneaux, il est difficile de décider plus exactement à quelle espèce il appartient. Les fragments comprennent :

1° Une portion de chaîne de treize anneaux, plus un quatorzième divisé en trois lanières; ils sont longs de 10^{mm} à 5^{mm}, larges de 8^{mm} ;

2° Six anneaux également réunis, plus allongés, la lon-

gueur étant de 14^{mm}, tandis que la largeur n'atteint que 6^{mm} ;

3° Deux anneaux intermédiaires aux précédents comme dimensions, mesurant 12^{mm} sur 8^{mm} ;

4° Trois anneaux longs de 12^{mm}, larges seulement de 3^{mm};

5° Deux anneaux ayant à peu près les dimensions de ceux sous le n° 3, l'un fendu en trois lanières;

6° Un groupe de trois anneaux, un long étroit, un moyen large et le dernier très-court (4^{mm} de long sur 6^{mm} de large), réunis tous trois par une de leurs extrémités, de sorte qu'ils semblent partis d'un centre au lieu d'être disposés en série·

7° Quatre anneaux isolés.

Sur tous ces fragments, sauf peut-être celui compris sous le n° 4, dont l'alcool avait fort contracté les anneaux, on observe une forme insolite qui a beaucoup frappé tous ceux qui ont bien voulu examiner ces échantillons. Au lieu d'être simplement plat, l'anneau présente sur l'une des faces un prolongement s'élevant de son milieu, de même épaisseur, de même aspect, égalant en hauteur la moitié de la largeur de l'anneau, de sorte que sur une coupe perpendiculaire à l'axe de l'animal, on obtient une figure en étoile à trois branches. Les pores génitaux, bien visibles sur chaque article, sont irrégulièrement alternés sur le bord de chacune des lames sans distinction. Sur l'anneau long faisant partie du groupe n° 6, on voit un pore sur deux des lames, la troisième n'en présentant pas, c'est le seul point où j'aie pu reconnaître cette particularité, d'où il résulte qu'un seul anneau offre deux ouvertures génitales.

En recherchant dans les auteurs des faits analogues, on trouve qu'un cas presque identique est signalé et figuré par M. Kuchenmeister (1), sur un *Tænia* qui lui avait été envoyé du Cap de Bonne-Espérance, par M. le docteur Rose; il n'avait reçu également qu'une portion du strobile, sans le scolex. Mais le même auteur rapporte avoir eu en sa possession un exemplaire du *T. cœnurus* offrant la particularité d'avoir un

---

(1) *Die in und an dem Kœrper des lebenden Menschen vorkommenden Parasiten*. 1re part. p. 93. Pl. III ; fig. 14-16, 1855.

corps triangulaire, un des angles simulant une crête; sur cet échantillon le scolex présentait une anomalie non moins curieuse, à savoir, six ventouses au lieu de quatre.

Ces observations conduisent à admettre qu'il faut voir dans ces faits une monstruosité, déduction conforme à celle de M. Kuchenmeister lui-même. En ayant égard au nombre anormal des ventouses dans un des cas qu'il a cités, à la présence des deux orifices génitaux sur un seul anneau, comme dans le fait qui est le sujet de la présente note, on doit admettre que cette monstruosité est produite par l'accollement et la pénétration partielle de deux individus; que de plus l'anomalie semble dépendre d'une malformation primitive du scolex.

Il serait important pour juger de ce dernier point, de posséder plus d'observations sur le nombre des ventouses dans les individus monstrueux, et c'est ce desideratum qui m'engage à appeler l'attention des helminthologistes sur les faits analogues qu'ils auraient l'occasion d'observer.

Sur l'emploi des condensateurs comme réservoirs d'électricité, par M. Guillemin.

Le tome XXIX des Comptes-rendus de l'Académie des sciences contient, p. 521, une note dans laquelle je démontre qu'on peut avoir des courants avec une pile isolée et sans communication entre les deux pôles. Pour avoir ces courants, j'avais construit un grand condensateur, à lame isolante très-mince de gutta-percha, vernie à la gomme laque, sur les deux faces de laquelle j'avais appliqué deux lames d'étain. La surface condensante était de plusieurs mètres carrés. Cet appareil, chargé par le contact des deux pôles de la pile, donnait des commotions, déviait l'aiguille aimantée, décomposait l'eau et produisait, en un mot, tous les effets de la pile.

Des condensateurs semblables ont été depuis cette époque employés à divers usages, récemment aux transmissions par les câbles sous-marins d'une grande longueur ; avec cette

différence, qu'à la lame de gutta-percha, on a substitué des feuilles de papier enduites de paraffine.

J'ai essayé, l'année dernière, d'employer ces condensateurs comme réservoirs d'électricité, pour renforcer le courant de la pile dans les transmissions télégraphiques.

Une pile de Daniell de 120 éléments de très-petites dimensions était assez résistante pour fournir un courant à peine capable de faire marcher le récepteur Morse placé à l'extrémité d'une ligne de 550 kilomètres de longueur. Le ressort antagoniste de l'électro-aimant fut tendu suffisamment pour empêcher tout mouvement de l'armature. En faisant communiquer alors les deux pôles de la pile avec les deux armatures du condensateur de 18 mètres carrés de surface, l'appareil s'est mis à parler, et, pour arrêter l'armature, il fallait faire tourner de trois tours la vis du ressort antagoniste.

Un second condensateur, de 18 mètres carrés de surface, ayant été ajouté, le même phénomène s'est produit; il a fallu de nouveau imprimer trois tours à la vis, pour arrêter l'armature. J'ai mis jusqu'à quatre condensateurs, formant au total une surface de 72 mètres carrés, la tension du ressort antagoniste se trouvait alors représentée par 12 tours de la vis de réglage. L'effet des condensateurs était donc de renforcer le courant de la pile, proportionnellement à l'étendue de leur surface condensante. Ces appareils absorbent l'électricité dans l'intervalle des contacts de la pile et cèdent leur charge électrique à la ligne, à chaque émission de courant; en sorte que, dans le premier moment du contact, le courant de la pile est renforcé par la décharge du condensateur, qui a servi de réservoir d'électricité.

Cette action du condensateur, bien qu'elle soit de courte durée, produit cependant une attraction permanente de l'armature qui reste en contact, lors même que le courant de la pile seule ne peut pas l'y maintenir. Cet effet tient à l'accroissement de magnétisme rémanent dû à la décharge du condensateur.

La charge électrique que ces 4 condensateurs prenaient au contact de la pile était presque triple de celle que le fil de 550 kilomètres acquiert, par le même contact. Cette

charge condensée produisait quelques points dans le récepteur Morse, mais elle s'épuisait très-vite.

En résumé, lorsqu'on a une pile insuffisante pour la transmission, à cause de sa trop grande résistance, on peut, sans diminuer cette résistance, augmenter cependant la puissance de transmission, en lui ajoutant un condensateur à large surface et à lame isolante mince. L'effet, sur les lignes, augmente proportionnellement à la surface du condensateur.

Ces essais, répétés avec l'appareil à cadran et avec l'appareil Hughes, ont donné les mêmes résultats. Il y aurait donc avantage à employer ces condensateurs, si leur prix n'était pas trop élevé.

On constate facilement que ces mêmes appareils renforcent considérablement l'étincelle de fermeture et diminuent l'étincelle de rupture. C'est l'inverse de ce qui a lieu pour l'extra-courant des bobines des électro-aimants.

Séance du 12 juin 1869.

PRÉSIDENCE DE M. MAREY.

La Société reçoit une note manuscrite de M. Maistrasse sur une sonde électrique marine.

M. Fischer annonce la découverte de l'acte de la ponte chez des têtards de Tritons.

M. Alix rend compte de quelques faits relatifs à l'anatomie du Chimpanzé.

M. Vaillant présente le résumé des recherches de M. Brown-Séquard sur les yeux des Pleuronectes.

M. Delanoue donne le résumé de ses explorations en Espagne, à la recherche des mines de soufre. Il mentionne la découverte de salses ou volcans de boue dans deux localités.

Séance du 26 juin 1869.

PRÉSIDENCE DE M. MAREY.

M. Fernet fait l'analyse du travail de M. Maistrasse sur une sonde électrique sous-marine, destinée à la recherche des corps submergés, et à celle de la variation de la salure de l'eau de mer.

M. A. Milne-Edwards présente le résultat de ses recherches sur l'anatomie des Limules.

Communication de M. Ribaucour sur les surfaces orthogonales.

Recherches anatomiques sur les Limules, par M. Alphonse Milne-Edwards.

En 1838, Van der Hœven publia sur les Limules un travail monographique; on trouve dans les Leçons d'anatomie comparée de M. Owen quelques indications sur des particularités de structure qui avaient échappé à l'auteur que je viens de citer, et plus récemment (1858) M. Gegenbauer a publié quelques observations sur la structure intérieure de de ces Crustacés: mais, à raison de la difficulté que les naturalistes éprouvent à se procurer des Limules dans un état de fraîcheur convenable pour la dissection, on n'a pu jusqu'ici en faire une étude approfondie. Grâce à l'obligeance de M. Lennier, directeur de l'aquarium du Havre, j'ai obtenu dernièrement plusieurs Limules d'Amérique peu d'heures après leur mort et j'en ai fait avec soin l'anatomie. Mes observations ont porté sur tous les systèmes d'organes; mais je me suis occupé principalement de l'appareil circulatoire, dont la disposition est fort remarquable. J'ai constaté qu'une partie du sang en sortant du cœur se rend directement dans un tube à parois résistantes qui loge non-seulement tout le système nerveux central, mais engaîne aussi la plupart des nerfs, notamment ceux des yeux, des pattes-mâchoires et des branchies dans une portion quel-

quefois très-considérable de leur trajet, de façon que les nerfs, dont les fibres élémentaires sont très-lâchement unies, baignent directement dans le sang chargé d'oxygène. Ce ne sont pas des artères qui accompagnent les nerfs et qui leur seraient simplement accolées. Ce sont des vaisseaux qui renferment dans leur intérieur les filets nerveux ainsi que les centres dont ils partent.

J'ajouterai que toutes les parties du système artériel communiquent directement entre elles à l'aide de larges anastomoses et que les ramifications extrêmes de ces vaisseaux sont d'une très-grande richesse. Les dessins joints à ce Mémoire et représentant le mode de distribution du sang dans l'ensemble de l'économie, les relations des artères avec le système nerveux, la manière dont les nerfs sortent de ces tubes, etc., permettent de se bien rendre compte de la disposition si singulière de l'appareil circulatoire des Limules.

Enfin, je ferai remarquer que le mode d'origine des nerfs permet de reconnaître dans les petites pattes-mâchoires antérieures de ces animaux les analogues des antennes des Crustacés ou des Insectes et des chelicères des Arachnides.

Il ressort de l'ensemble des recherches dont il vient d'être question que c'est avec les Arachnides et non avec les Crustacés que les Limules présentent le plus d'analogie.

Sur les surfaces orthogonales, par M. A. Ribaucour.

Dans une communication que j'ai faite à la Société, j'ai montré que, si des cercles sont normaux à trois surfaces, ils le sont à une infinité d'autres qui font partie d'un système triplement orthogonal; je propose d'appeler ces systèmes orthogonaux des *systèmes cycliques*.

Un des *systèmes cycliques* les plus intéressants est le suivant : on prend une surface à courbures opposées dont la courbure intégrale est constante (applicable sur une sphère imaginaire, si l'on veut); dans chaque plan tangent et du plan de contact comme centre, on décrit un cercle dont le

rayon est égal à la racine carrée du produit des rayons de courbure principaux ; *tous les cercles ainsi obtenus sont normaux à des surfaces toutes applicables les unes sur les autres et sur une sphère imaginaire.* Si l'on prend deux de ces surfaces et qu'on cherche le lieu des points qui en sont également distants, on trouve des surfaces applicables sur des surfaces de révolution, dont on obtient la méridienne de la manière que voici : on prend deux *tractrices* égales ayant même asymptote, et l'on cherche la courbe lieu des points également distants. Cette courbe, tournant autour de l'asymptote des tractrices, engendre l'une des surfaces de révolution en question.

En m'occupant de *systèmes cycliques* qui comprennent un plan, j'ai trouvé la proposition suivante :

Soit un cylindre du second degré et un plan quelconque, les coniques homofocales à la trace du cylindre sur le plan sont la projection, faite parallèlement aux génératrices, d'un réseau conjugué tracé sur une surface du second degré quelconque inscrite dans le cylindre.

Je me suis aussi occupé de la transformation des systèmes orthogonaux quelconques, en partant des idées suivantes :

Soit un système orthogonal dans lequel on a :

$$ds^2 = H^2 . d\rho^2 + H_1^2 \, d\rho_1^2 + H_2^2 \, d\rho_2^2 ;$$

sur les tangentes OA, OB, OC, aux trois lignes de courbure passant par un point O, portons les segments X, Y, Z dont les extrémités sont A, B, C. Supposons que X, Y, Z soient trois fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2, tellement choisies que, si l'on se déplace dans tous les sens sur la surface (ρ_2), l'extrémité du segment Z décrive une surface (C) tangente en C au plan ABC, et de même pour les segments Y et X ; il est clair que si l'on décrit des sphères ayant leurs centres sur (A) (B) (C) et tangentes respectivement aux surfaces (ρ), (ρ_1), (ρ_2), les secondes nappes des enveloppes de ces sphères vont se couper à angle droit en un point O' symétrique de O, par rapport au plan ABC ; les trois familles de ces surfaces correspondant aux familles des surfaces (A) (B) (C), formeront donc un système triplement orthogonal.

Si l'on cherche quelles sont les valeurs à donner à X,Y,Z,

on trouve que F désignant une fonction de ρ, ρ_1, ρ_2, on doit avoir :

$$X = \frac{H\,F}{\frac{d\,F}{d\,\rho}}, \qquad Y = \frac{H_1\,F}{\frac{d\,F}{d\,\rho_1}}, \qquad Z = \frac{H_2\,F}{\frac{d\,F}{d\,\rho_2}};$$

F satisfaisant d'ailleurs à l'équation :

$$\frac{d^2\,F}{d\rho\,d\rho_1} = \frac{d\,F}{d\,\rho}\,\frac{1}{H}\,\frac{d\,H}{d\,\rho_1} - \frac{d\,F}{d\,\rho_1}\,\frac{1}{H_1}\,\frac{d\,H_1}{d\,\rho},$$

et à deux autres équations qui s'en déduisent par permutation; d'ailleurs, sur ces trois équations, l'une est conséquence des deux autres ; posant :

$$P = \frac{2\,F}{\frac{1}{H^2}\left(\frac{d\,F}{d\rho}\right)^2 + \frac{1}{H_1^2}\left(\frac{d\,F}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{d\,F}{d\rho_2}\right)^2},$$

le ds^2, dans ce nouveau système, devient :

$$ds^2 = \sum_{\rho^i=\rho}^{\rho^i=\rho_2} \left(\frac{d\,P}{P\,d\,\rho}\right)^2 \frac{F^2\,H^2}{\left(\frac{dF}{d\rho}\right)^2}\,d\rho^2$$

Ces systèmes comprennent tous ceux que l'on obtient à l'aide de la transformation du premier par rayons vecteurs réciproques.

Mais, d'après un résultat que j'ai énoncé à la Société et qui avait été trouvé déjà par M. Combescure, au système primitif correspond le système dans lequel

$$ds^2 = \sum_{\rho_i=\rho}^{\rho_i=\rho_2} \left[k \frac{\frac{d}{d\rho}\left(\frac{F}{P}\right)}{\left(\frac{dF}{d\rho}\right)} - 1 \right]^2 H^2 \, d\rho^2.$$

La comparaison de ces deux sytèmes, qui sont tous deux réciproques du premier, donne encore d'autres systèmes qui viennent eux-mêmes, en se combinant avec les premiers, en fournir de nouveaux ; je citerai simplement celui qui a même image sphérique que le système dérivé du système primitif par la transformation que j'expose aujourd'hui, pour lequel on a :

$$ds^2 = \sum_{\rho_i=\rho}^{\rho_i=\rho_2} \left[\frac{k}{F} \left(1 - \frac{\frac{dF}{F d\rho}}{\frac{dP}{P d\rho}} \right) - 1 \right]^2 \left(\frac{\frac{dP}{P d\rho}}{\frac{dF}{F d\rho}} \right)^2 H^2 \, d\rho^2.$$

Séance du 10 juillet 1869.

PRÉSIDENCE DE M. DE LA GOURNERIE.

M. Guillemin fait une communication sur la force électro-motrice des différentes piles.

M. Prillieux rend compte des expériences relatives à l'influence de la lumière sur les plantes.

Séance du 24 juillet 1869.

PRÉSIDENCE DE M. DELANOUE.

M. de Caligny adresse à la Société une note sur un appareil de son invention, destiné à faire des épuisements au moyen des vagues de la mer.

M. Guillemin discute cette question : Quelles sont les piles convenables pour le service télégraphique?

M. Moutard est nommé président pour le deuxième semestre de 1869.

M. de Caligny a communiqué dans cette séance des considérations sur un de ses appareils à faire des épuisements au moyen des vagues de la mer.

Il rappelle que le journal *l'Institut* a publié une note sur cet appareil, extraite du procès-verbal de la séance de la Société du 17 mai 1851. Pour éviter les répétitions, il suffit, relativement à ce qui va suivre, de rappeler qu'un tuyau recourbé horizontalement ou de manière que sa partie plongée, évasée convenablement, reçoive le choc des vagues, est disposé de façon à faire osciller une colonne liquide au-dessus et au-dessous du niveau de la mer, tel que serait ce niveau si elle était tranquille, et qu'il en résulte que si un clapet latéral est disposé à une certaine profondeur, il peut entrer alternativement de l'eau d'un marais dans ce système par un tuyau latéral.

Ce dernier peut, dans certaines circonstances, avoir une assez grande longueur. Mais en général il paraît que, dans la pratique, il vaudra mieux, quand l'eau du marais sera amenée dans la mer par un long tuyau de conduite, disposer près de l'extrémité de celui-ci, du côté de la mer, un puits ou réservoir latéral à ciel ouvert, ayant une section d'une certaine étendue, en communication avec ce tuyau de conduite. Ce sera dans ce puits ou réservoir latéral que débouchera un tuyau court portant le clapet précité.

De cette manière, quelque irrégulier que soit le mouvement oscillatoire, on n'aura pas à s'embarrasser de l'inertie de l'eau du grand tuyau de conduite, c'est-à-dire que la moindre dénivellation de la colonne liquide oscillante au-dessous du niveau de l'eau dans le marais fera ouvrir le clapet de l'appareil, de manière à introduire de l'eau de ce marais, sans lui permettre d'y retourner.

Si l'on suppose même qu'il n'y ait aucun appareil proprement dit, et qu'on veuille seulement utiliser la dénivellation alternative des vagues librement abandonnées à elles-mêmes devant une porte de flot ou une cloison garnie de clapets, disposés à l'extrémité d'un tuyau de conduite établi dans certaines conditions, il devient alors indispensable en général de disposer derrière cette porte ou cette cloison un puits ou réservoir à ciel ouvert communiquant avec le tuyau de conduite du marais à épuiser, si celui-ci n'est pas extrêmement court, ou si l'eau n'est point amenée seulement par un canal à ciel ouvert assez large.

En effet, sans cette précaution, l'inertie de l'eau contenue dans ce tuyau de conduite ne permettrait pas à cette eau de prendre une vitesse convenable, dans l'intervalle d'une vague à la suivante; tandis que, s'il y a ainsi un réservoir à ciel ouvert, l'eau de ce réservoir pourra, à chaque dénivellation de la vague, entrer dans la mer en quantité convenable.

On a proposé dernièrement, sans avoir eu connaissance, à ce qu'il paraît, de la note précitée de 1851, d'employer la dénivellation des vagues libres à faire écouler alternativement l'eau d'un marais au-dessous du niveau le plus bas de la mer, au moyen d'une sorte de clapet de retenue. Mais dans la localité dont il s'agissait, l'eau était, à ce qu'il paraît, amenée du marais dans la mer par un assez long tuyau de conduite souterrain, ayant des clapets à ses deux extrémités.

M. de Caligny n'a encore pu savoir quel a été le résultat de l'expérience, mais si elle n'avait pas réussi, il faudrait l'attribuer, selon lui, à ce qu'on n'aurait pas employé le réservoir dont la description est l'objet de la communication qu'il fait aujourd'hui.

Quant à l'appareil proprement dit, objet de la note précitée de 1851, les mouvements des vagues sont tellement irréguliers que si, dans certaines circonstances, on ne prenait pas la précaution, au moyen d'un autre clapet, d'empêcher une oscillation de retour du réservoir latéral vers le marais, il pourrait arriver qu'il y eût de l'effet perdu par suite d'un

mouvement en retour. L'expérience seule pourra montrer l'utilité de certains détails de ce genre, mais il était intéressant d'indiquer les principes de l'établissement du réservoir latéral. Les phénomènes dont il s'agit ne peuvent d'ailleurs être bien compris qu'au moyen de ceux qui sont décrits dans un mémoire de M. de Caligny, publié dans le *Journal de mathématiques* de M. Liouville, t. VIII, première série, 1843, p. 23 à 40.

Séance du 14 août 1869.

PRÉSIDENCE DE M. MOUTARD.

M. Bert présente le résultat de diverses expériences sur les mouvements de la Sensitive.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cᵉ RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 17002-9

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS.

Séance du 23 octobre 1869.

PRÉSIDENCE DE M. MOUTARD.

M. de Caligny adresse une note sur une nouvelle application de la force centrifuge dans un de ses appareils à épuisement.

M. Laguerre fait une communication sur les géodésiques de l'ellipsoïde.

M. Moutard expose ses recherches sur les propriétés des lignes asymptotiques des surfaces.

MM. Yvon Villarceau, Transon, Laussedat, sont nommés membres de la commission chargée d'examiner la candidature de M. Gould, comme membre correspondant.

M. Delanoue rend compte de la réunion de la Société géologique de France au Puy.

Sur une application nouvelle de la force centrifuge,
par M. A. de Caligny.

M. de Caligny a communiqué dans cette séance une note sur une application nouvelle de la force centrifuge, dans un

de ses appareils à faire des épuisements, au moyen des vagues de la mer. La note contient en outre diverses considérations sur ce système.

L'auteur rappelle d'abord qu'il a communiqué le principe de cet appareil dans la séance du 17 mai 1851, et qu'il est revenu récemment sur ce sujet dans la séance du 24 juillet dernier. Il suffit, pour ce qui va suivre, de se souvenir que l'eau entre alternativement d'un marais à épuiser dans l'appareil, par suite d'une oscillation occasionnée par les vagues, et qu'elle ne peut retourner dans ce marais, en étant empêchée par un clapet de retenue.

Il est intéressant de disposer les choses de manière à diminuer autant que possible la moyenne des pressions latérales dans la partie de l'appareil où doit entrer l'eau à épuiser. Or, aux moyens déjà signalés à la Société, M. de Caligny ajoute un effet de la force centrifuge provenant de ce que le clapet, avec sa chambre, peut être disposé de manière à introduire l'eau par l'*intérieur* du coude du tuyau en forme de L. On sait, en effet, que la force centrifuge qui augmente la pression latérale dans la partie concave d'un coude, la diminue au contraire dans la partie qui est convexe par rapport à la colonne liquide.

L'ensemble du système peut d'ailleurs être disposé de plusieurs manières selon les circonstances ; ainsi, le tube vertical peut être mis, soit dans la mer, soit dans le marais ou dans un réservoir en communication avec ce dernier. S'il n'est pas dans la mer, la construction est plus simple, le clapet, quelle que soit du reste sa position la meilleure, n'a pas besoin de tuyau latéral pour communiquer avec le marais, une simple chambre étant alors suffisante.

Si l'on voulait diminuer autant que possible la profondeur des fondations, le clapet pourrait être mis près du coude de manière à introduire l'eau immédiatement par la partie horizontale du tuyau.

Dans ce cas, si l'on ne craignait pas les ensablements, on pourrait avoir un coude à angle droit brusque, c'est-à-dire, dont le *rayon dit intérieur* serait nul ; le rayon dit *extérieur* étant égal au diamètre du tuyau, parce qu'on diminuerait convenablement la résistance de l'eau dans ce coude en y disposant des lames concentriques.

Quant à l'évasement, qu'il est utile de mettre à l'extrémité qui débouche dans la mer, on pourra n'élargir pour cela le tuyau que dans le sens horizontal, si l'on veut diminuer la profondeur des fondations, et si l'on peut l'allonger assez pour que sa section de sortie du côté de la mer soit suffisamment grande, que cependant la colonne liquide ne varie de largeur que par degrés assez insensibles.

Abstraction faite de l'objet le plus spécial de cette communication, sur une propriété résultant de la force centrifuge, et même en rencontrant un effet contraire à celui qui a été signalé ci-dessus quant à la force centrifuge, il n'est pas sans intérêt d'indiquer la possibilité de se servir d'un tuyau déjà construit pour faire écouler l'eau d'un marais dans la mer, avec un clapet de retenue en amont de ce tuyau, c'est-à-dire à celle de ses extrémités qui débouche dans le marais.

Il suffit, quand ce tuyau n'est pas trop long, par rapport aux effets que doivent produire les vagues, de disposer sur lui, près de cette extrémité, un tuyau vertical, bien entendu ouvert par ses deux bouts. On conçoit que, si les oscillations occasionnées par les vagues dans ce tuyau vertical descendent assez bas, le clapet s'ouvrira sous la pression de l'eau du marais, et que, si l'avantage précité de la force centrifuge est au contraire remplacé, pendant une partie de chaque période, par un effort de cette force en sens contraire de l'introduction de l'eau; si, de plus, on trouve un surcroît de résistance provenant d'ailleurs de ce qu'alors on ne pourra disposer dans le coude les lames concentriques précitées, il faudra tenir compte de ce que la veine liquide entrera directement du marais dans le système, sans se plier dans un coude. Or cela aura aussi ses avantages, surtout pour le cas où le tuyau pourrait être employé, quand l'appareil ne fonctionnerait pas, à faire écouler l'eau du marais dans la mer par les moyens ordinaires.

L'évasement précité n'a pas seulement pour objet de mieux recevoir la percussion des vagues, en diminuant d'ailleurs l'effet de la *contraction* de la veine liquide à son entrée de la mer dans l'appareil, il a aussi pour but d'employer convenablement la force vive de l'eau qui entre alternativement dans la mer. *Quant à ce dernier but*, cet évasement paraît avoir d'autant moins d'importance que l'amplitude de l'oscillation

dans le tuyau vertical est moindre par rapport à la longueur du tuyau plongé. Mais on n'entrera pas ici dans les détails de ce genre. Il est à peine nécessaire d'ajouter que, dans certaines circonstances du moins, il sera sans doute utile que le tuyau plongé soit graduellement évasé, même depuis le coude, de manière que les changements de sections soient aussi peu sensibles que cela se pourra.

Abstraction faite des applications de ce système à l'épuisement des marais, il pourra être employé à l'assainissement des ports dans les mers sans flux et reflux. On sait, en effet, qu'il serait utile d'avoir un moyen simple de déplacer pour cela de grandes masses d'eau, même sans élever le liquide au-dessus du niveau d'un port.

On trouvera des dessins de cet appareil dans un des prochains numéros de la *Revue universelle* de M. de Cuyper.

Séance du 13 novembre 1869.

PRÉSIDENCE DE M. MOUTARD.

M. Laurent fait une communication sur la géologie de l'isthme de Suez.

MM. Gaudry, Janssen, d'Omalius d'Halloy, Vaillant, Delanoue, présentent quelques observations à ce sujet.

M. Ribaucour fait une communication sur la déformation des surfaces ;

M. Laguerre, sur quelques propriétés des lignes spiriques ;

M. de Caligny, sur un cas singulier d'un appareil de son invention à faire des épuisements au moyen des vagues de la mer ;

M. Moutard, sur un mode particulier de transformation des surfaces.

Sur la théorie de l'application des surfaces l'une sur l'autre, par M. Ribaucour.

On sait quelles difficultés présente l'intégration de l'équation aux différentielles partielles du second ordre qui domine la théorie de la déformation des surfaces. M. Moutard et moi, chacun de notre côté, nous nous sommes proposé un problème plus abordable : la recherche des groupes de deux surfaces applicables l'une sur l'autre. M. Moutard, à l'aide d'une transformation élégante qu'il a communiquée à la Société, et moi, directement, en me servant de formules spéciales qui semblent très-importantes dans la théorie des surfaces, nous avons pu former un nombre indéfini de ces groupes, même de ceux qui comprennent deux surfaces algébriques. J'exposerai dans cette note deux théorèmes complétement géométriques qui permettent de trouver autant de solutions que l'on veut de la question.

Th. I. — Soient deux surfaces (A) et (A') applicables l'une sur l'autre; joignons les points correspondants A et A' et portons à partir du milieu M sur AA', de part et d'autre, les longueurs MB et MB' égales à K fois AM; les surfaces (B) et (B') lieux des points B et B' sont encore applicables l'une sur l'autre.

La connaissance d'un groupe de surfaces applicables l'une sur l'autre fournit donc une infinité de groupes analogues, correspondant aux diverses valeurs de la constante K.

Je me suis proposé, connaissant la surface (M) lieu des milieux des cordes AA', de trouver tous les groupes tels que (A) (A'); ils sont tous donnés par une équation aux différentielles partielles du second ordre, sur laquelle je reviendrai dans une autre communication, et qui s'intègre immédiatement dans le cas où (M) est une surface du second degré.

J'ai aussi étudié la question à un autre point de vue. Élevons par les milieux M des cordes telles que AA', des plans perpendiculaires à ces cordes, ils enveloppent une surface (O). Nous donnant (O) nous pouvons chercher tous les groupes de surfaces (A) (A') correspondants; ils sont encore donnés

par une équation aux différentielles partielles du second ordre que l'on peut rendre identique à celle trouvée en considérant la surface (M).

Il en résulte qu'*étant donnée une surface* (*S*), *on peut la considérer soit comme une surface* (M) *soit comme une surface* (*O*). *La connaissance d'un groupe* (*A*) (*A'*), *dans le premier cas, équivaut à celle d'un autre groupe dans le second cas.*

C'est en cela que consiste mon second théorème. Les conséquences à en tirer sont nombreuses.

Imaginons que nous connaissions un groupe (A) (A') ; la surface (M), lieu des milieux, considérée comme surface (O) donne un second groupe (A_1) (A'_1) ; la surface (M_1) des milieux des cordes A_1 A'_1, donne en la considérant comme surface (O) un troisième groupe (A_2) (A'_2).... etc. On a donc ainsi une infinité de groupes déduits du premier ; mais on peut aussi en déduire une autre infinité en considérant la surface (O) enveloppe des plans menés par M perpendiculairement à A A' comme surface (M).... et ainsi de suite ; donc : connaissant un groupe (A) (A') de surfaces applicables l'une sur l'autre, on en peut déduire algébriquement une infinité d'autres groupes et par le théorème I et par le théorème II.

En particulier on n'a qu'à supposer que (A) et (A') soient deux surfaces identiques algébriques pour en déduire une infinité de groupes algébriques.

Je terminerai cette note en signalant un cas particulier intéressant, c'est celui où les points A et A' supposés invariablement liés aux plans tangents de la surface (O) ou de la surface (M), les surfaces (A) et (A') sont toujours applicables l'une sur l'autre, quelle que soit la déformation de (O) ou de (M).

Dans ce cas, les surfaces (O) et (M) sont applicables sur des surfaces de révolution ; les points A et A' se construisent immédiatement lorsqu'on se donne la méridienne de la surface.

Je me propose d'exposer à la Société dans d'autres communications la suite de mes recherches sur la théorie des surfaces et sur la déformation en particulier.

Sur quelques propriétés des lignes spiriquse,
par M. Laguerre.

1. On désigne sous le nom de lignes *spiriques* les courbes anallagmatiques du quatrième ordre qui ont un axe de symétrie. Ces lignes ont été depuis longtemps l'objet des études des géomètres, et, récemment encore, M. de la Gournerie leur a consacré un remarquable mémoire inséré dans le Journal de Liouville (1869).

Comme toutes les anallagmatiques, ces courbes ont quatre foyers singuliers, dont deux réels et deux imaginaires; ces quatre foyers sont d'ailleurs les foyers ordinaires des quatre coniques homofocales au moyen desquelles, d'après la proposition de M. Moutard, on peut décrire ces courbes en les considérant comme enveloppes de cercles.

On peut distinguer deux espèces de spiriques; dans les premières, que je dirai être de première espèce, les deux foyers singuliers réels sont situés sur l'axe de symétrie; dans les autres, que je dirai être de deuxième espèce, ce sont les deux foyers singuliers imaginaires qui sont situés sur cet axe. Leurs propriétés, du reste, sont les mêmes au fond, et ne diffèrent que par les diverses façons de les énoncer. Dans tout ce qui suit, je considérerai spécialement les spiriques de première espèce.

N'ayant à considérer ici que les foyers singuliers de ces courbes, *je les désignerai simplement sous le nom de foyers*. Autour de chaque foyer singulier, comme centre, on peut décrire un cercle qui oscule la courbe en chacun des ombilics; je désignerai les deux cercles ainsi définis sous le nom de *cercles focaux*.

Etant donné un cercle, j'entends par puissance d'un point, relativement à ce cercle, le carré de la longueur de la tangente que l'on peut mener de ce point au cercle.

Les spiriques renferment, comme cas particuliers, un grand nombre de courbes remarquables, notamment les ovales de Descartes, ou, pour me servir d'une expression plus nette déjà employée par M. de la Gournerie, les *cartésiennes*;

elles peuvent être considérees comme des spiriques dans lesquelles les deux foyers réels viennent se confondre.

La spirique peut encore s'abaisser au troisième degré; je la désignerai dans ce cas, pour abréger, par le nom de cataspirique. La cataspirique n'a qu'un seul foyer; elle peut être considérée comme une spirique dans laquelle un des foyers est rejeté à l'infini.

Les coniques peuvent aussi être regardées comme des spiriques dont les deux foyers ont été rejetés à l'infini.

D'un point de l'axe d'une spirique, on peut mener huit normales à la courbe, dont quatre se confondent avec l'axe et dont les quatre autres sont symétriques par rapport à cet axe. Je désignerai sous le nom de points *associés* les deux points situés d'un même côté de l'axe, et tels que les normales élevées en ces points concourent en un même point de l'axe.

2. Les spiriques jouissent de toutes les propriétés connues des anallagmatiques; elles possèdent en outre des propriétés particulières. Ces propriétés se déduisent facilement de la proposition suivante, qui s'établit immédiatement par la définition même des spiriques.

PROPOSITION. « Etant donnés deux points fixes A et B d'une spirique, et un point mobile C situé sur cette courbe; si l'on joint le point mobile aux deux points fixes, et si, par le milieu des cordes ainsi obtenues, on mène des perpendiculaires à ces cordes, ces perpendiculaires déterminent sur l'axe de la courbe deux divisions homographiques, dont les points doubles sont les deux foyers situés sur l'axe. »

THÉORÈME I. « Etant donnés deux points fixes A et B d'une spirique, si on joint un point C mobile sur cette courbe aux deux points fixes, et si, sur les milieux des cordes AC et BC, on mène des perpendiculaires à ces cordes, coupant l'axe de symétrie aux points α et β; F et G désignant les deux foyers réels de la spirique, le rapport

$$\frac{F\alpha}{F\beta} : \frac{G\alpha}{G\beta}$$

demeure constant, quelle que soit la position du point C sur la courbe, et sa valeur est égale au rapport des puissances

des points A et B relativement au cercle focal ayant pour centre le foyer F. »

THÉORÈME II. « Etant donnés deux points fixes A et B d'une cataspirique et un point mobile C situé sur la courbe ; si, par le milieu des cordes AC et BC, on mène des perpendiculaires coupant respectivement l'axe de la courbe aux points α et β, le rapport

$$\frac{F\alpha}{F\beta}$$

est constant, quelle que soit la position du point mobile sur la courbe, et ce rapport est égal au quotient des puissances des points A et B relativement à la courbe. »

THÉORÈME III. « Etant donnés deux points fixes A et B d'une cartésienne et un point mobile C situé sur la courbe; si, par les milieux des cordes AC et BC, on mène des perpendiculaires à ces cordes, coupant respectivement l'axe de la courbe aux points α et β, la différence

$$\frac{1}{F(\alpha)} - \frac{1}{F(\beta)}$$

est constante, quelle que soit la position du point mobile sur la courbe, et la valeur de cette différence est proportionnelle à la différence des carrés des distances du foyer aux points A et B. »

THÉORÈME IV. « Le produit des puissances d'un point quelconque d'une spirique relativement à ses deux cercles focaux est constant. »

THÉORÈME V. « Si l'on prend les polaires du point d'une spirique relativement à ses deux cercles focaux, la portion de la tangente interceptée entre ces deux droites a pour point milieu le point de contact. »

THÉORÈME VI. « Etant donnée une corde quelconque AB d'une spirique, si l'on prend les points de rencontre α et β de l'axe avec les normales menées à la courbe par les extrémités de cette corde, et le point K où la perpendiculaire élevée au milieu de la corde coupe cet axe, le point K

est l'un des deux points doubles de l'involution déterminée par les deux points F, G et α, β. »

Remarque. — Cette propriété est exprimée par la relation suivante :

$$\frac{\overline{FK}^2}{\overline{GK}^2} = \frac{F\alpha.\ F\beta}{G\alpha.\ G\beta}.$$

Lorsque la courbe est une cataspirique, le foyer G est rejeté à l'infini, et l'on a la relation

$$\overline{FK}^2 = F\alpha.\ F\beta.$$

Lorsque la courbe est une cartésienne, les deux foyers coïncident en un même point F, et par conséquent les quatre points F, K; α, β sont en rapport harmonique.

Si la courbe est une conique, les deux foyers sont à l'infini et le point K est le milieu du segment $\alpha\beta$.

THÉORÈME VII. « Si deux points d'une spirique sont situés sur un même perpendiculaire à l'axe, ou s'il sont à égale distance du centre de la courbe ; les normales en ces points coupent l'axe en des points équidistants du centre. »

J'appelle ici *centre de la spirique* le point milieu des deux foyers.

THÉORÈME VIII. « Le point de l'axe où concourent les normales en deux points associés et le point où la perpendiculaire, élevée au milieu de la corde qui les joint, coupe l'axe, partagent harmoniquement le segment intercepté entre les foyers. »

THÉORÈME IX. « Le milieu de la droite qui joint deux points associés quelconques est situé sur une droite fixe perpendiculaire à l'axe. »

THÉORÈME X. « La somme des carrés des distances des deux points associés à un foyer est constante et égale au double du carré du rayon de ce cercle.

THÉORÈME XI. « Si, par le milieu d'une corde d'une spirique, on mène une perpendiculaire à cette corde, le rapport des distances du point de rencontre de cette droite avec l'axe aux deux foyers est égal et de signe contraire au quotient

de la puissance d'une des extrémités quelconques de la corde relativement au cercle focal du premier foyer, par la puissance de l'autre extrémité relativement à l'autre cercle focal. »

THÉORÈME XII. « La normale en un point d'une spirique partage la droite joignant les foyers en deux segments dont le rapport est égal et de signe contraire à celui des puissances du point relativement aux cercles focaux. »

THÉORÈME XIII. « Sur une normale quelconque à une spirique, le rapport des segments déterminés par le centre de courbure, sur la portion de la normale interceptée entre l'axe et la courbe, est proportionnel au *carré* du sinus de l'angle que la normale fait avec l'axe et au *cube* de la longueur de la tangente menée du point de rencontre de la normale avec l'axe au cercle décrit sur la droite qui joint les deux foyers comme diamètre. »

3. Les spiriques, qui ont deux axes de symétrie, sont à la fois de première et de seconde espèce et jouissent des propriétés précédentes relativement à leurs deux axes. De là des propriétés particulières que j'exposerai dans une autre communication.

Les surfaces anallagmatiques, ayant un plan de symétrie, jouissent relativement aux normales qu'on peut leur mener de quelques-unes des propriétés énoncées ci-dessus. Je développerai plus tard ce point important de leur théorie.

Sur une nouvelle application de la force centrifuge,
par M. A. de Caligny.

M. de Caligny a fait dans cette séance une communication ayant principalement pour objet un cas singulier de la théorie d'un appareil de son invention à faire des épuisements au moyen des vagues de la mer, dont il a parlé le 23 octobre dernier.

Si un tuyau en forme de L, dont la partie horizontale est

toujours plongée dans la mer ou dans un lac, a des dimensions convenables par rapport aux vagues ordinaires, et si l'on peut supposer que celles-ci soient assez régulières, les deux extrémités du tuyau étant toujours ouvertes, on est conduit à un résultat théorique intéressant.

Supposons que l'intumescence d'une vague, même abstraction faite, si l'on veut, de la percussion latérale de cette vague, trouve dans le tube vertical le liquide à une hauteur qui ne soit pas au-dessus du niveau moyen de la mer à l'instant dont il s'agit, c'est-à-dire ce dernier niveau étant considéré comme si la mer était tranquille. L'eau montera dans le tube vertical en vertu de la pression de l'intumescence.

Lorsque ensuite il y aura dans ce tube une oscillation en retour, si la durée de celle-ci se trouve combinée avec celle du mouvement alternatif des vagues, de manière que la descente de l'eau dans le tube vertical fasse convenablement sortir le liquide dans le creux d'une vague, l'eau descendra notablement plus bas dans le tube vertical que la première intumescence ne l'y avait trouvée. Par conséquent, il y a lieu de penser que l'intumescence suivante pourra élever l'eau dans le tube vertical plus haut que la première. On conçoit que, par suite d'oscillations successives, l'eau pourra s'élever ainsi à des hauteurs de plus en plus grandes, et descendre aussi à des profondeurs de plus en plus grandes, dont même l'expérience seule pourra assigner la limite, si la partie plongée du système est enfoncée assez profondément dans la mer.

L'état de la question sera changé à cause de l'introduction alternative de l'eau d'un marais à épuiser par un clapet latéral en vertu de la baisse alternative de la colonne liquide verticale, conformément à ce qui a été expliqué dans d'autres communications. D'ailleurs on ne peut pas compter sur un mouvement assez régulier des vagues pour que cet effet d'oscillations, pour ainsi dire *accumulées*, puisse être soumis au calcul.

Si, pour utiliser un tuyau de conduite déjà existant, on dispose un tube vertical près de l'extrémité qui est dans le marais, on peut étudier par tâtonnement la section la plus convenable de ce tube en y introduisant une portion de cylindre circulaire vertical dont le reste aura été retranché soit par un

plan, soit plutôt, en général, par une surface cylindrique verticale. La forme de celle-ci est à étudier par expérience.

On ajoutera seulement ici que cette pièce, qui sera fixe, doit être mise dans la partie de ce tube vertical qui est du côté de la mer; que sa partie inférieure sera disposée en biseau, convenablement arrondi, de manière à ne pas gêner le mouvement de l'eau ascendante venant du côté de la mer; enfin que la section de la partie du tube vertical qui restera libre se rapprochera plutôt d'une forme rectangulaire que d'un segment de cercle, parce que, dans les coudes de ce genre, c'est par cette section que l'eau ascendante doit principalement passer.

Sur la déformation des surfaces, par M. Moutard.

Dans la séance du 12 juin dernier, j'ai fait connaître verbalement à la Société quelques résultats auxquels j'étais parvenu dans l'étude d'un mode spécial de transformation géométrique ayant pour objet de *déduire, point par point, d'une surface donnée, une autre surface dont tous les éléments linéaires sont assujettis à être dirigés orthogonalement aux éléments correspondants de la surface primitive.* Les recherches auxquelles j'ai continué à me livrer sur ce sujet m'ont fourni la solution du problème, non-seulement pour le cas des surfaces du second degré, qui faisait l'objet de ma communication, mais encore pour un grand nombre d'autres cas, comprenant en particulier ceux où la surface primitive est une surface réglée quelconque, ou, plus généralement, une surface susceptible d'être engendrée par le déplacement d'une ligne de figure invariable. Cette solution est encore trop compliquée, et trop liée à l'analyse pénible par laquelle je l'ai obtenue pour être utilement exposée devant la Société, mais il ne me paraît pas sans intérêt de montrer dès maintenant la connexité qui existe entre le problème que je me suis proposé, et le problème célèbre de la déformation des surfaces; c'est l'objet de la présente communication.

Concevons que (x, y, z) et (x_1, y_1, z_1) désignent les coordonnées de deux points correspondants de deux surfaces ayant entre elles le mode de dépendance énoncé, on aura évidemment pour tous les systèmes de valeurs des deux paramètres uniques dont dépendent ces six coordonnées :

$$dxdx_1 + dydy_1 + dzdz_1 = 0.$$

Si donc on considère les deux surfaces définies par les équations :

$$\xi = \lambda x + \mu x_1, \quad \eta = \lambda y + \mu y_1, \quad \zeta = \lambda z + \mu z_1$$

et

$$\xi_1 = \lambda x - \mu x_1, \quad \eta_1 = \lambda y - \mu y_1, \quad \zeta_1 = \lambda z - \mu z_1,$$

on aura :

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = d\xi_1^2 + d\eta_1^2 + d\zeta_1^2$$

et par suite les deux surfaces (ξ, η, ζ), et (ξ_1, η_1, ζ_1), seront applicables l'une sur l'autre. Toute solution particulière de mon problème fournit donc une solution particulière du problème qui a pour objet de trouver deux surfaces applicables l'une sur l'autre; il n'est pas moins aisé de voir que toute solution particulière du second problème fournit une solution du premier; en conséquence, si l'on pouvait former le tableau complet de tous les couples de surfaces qui satisfont à l'une des deux conditions, on aurait par cela même le tableau complet de tous les couples de surface qui satisfont à l'autre. Je ne prétends pas dire, d'après cela, que les deux problèmes soient identiques, car lorsqu'on se propose, par exemple, de trouver toutes les surfaces applicables sur une surface donnée, de nouvelles difficultés analytiques d'un ordre moindre, il est vrai, se présentent lorsqu'on veut rechercher tous les couples de surfaces assujetties à l'orthogonalité de leurs éléments linéaires correspondants, et susceptibles de fournir un couple de surfaces applicables dont l'une soit précisément la surface donnée. Mais la remarque qui précède n'en établit pas moins entre les deux problèmes un lien que, je dois l'ajouter, le développement de l'analyse rend encore plus intime.

En appliquant cette remarque aux formules les plus générales que j'aie pu obtenir, je suis parvenu à former des équations renfermant explicitement jusqu'à *six fonctions arbitraires bien distinctes*, et leurs dérivées en nombre quelconque, mais limité, qui, par le simple changement de signe d'un paramètre, fournit des couples de surfaces applicables l'une sur l'autre. Ces formules, que je ne transcrirai point ici à cause de leur complication, sont algébriques, et fournissent par conséquent des couples de surfaces applicables algébriques, lorsqu'on choisira pour les six fonctions arbitraires elles-mêmes des fonctions algébriques. Dans ce cas, il arrivera d'ailleurs fréquemment que les deux surfaces d'un même couple ne constitueront, au point de vue de la continuité, qu'un seul et même être géométrique; et l'on obtiendra ainsi un nombre illimité de surfaces susceptibles de coïncider avec elles-mêmes, après avoir subi une *déformation* qui altérerait en chaque point les deux rayons de courbure principaux, leur produit restant, bien entendu, constant, en vertu de la loi de Gauss. Un type extrêmement simple de surfaces satisfaisant à cette condition, pour lequel la vérification immédiate est facile, est fourni par les équations :

$$x = f(u), \quad y = \int dv \sqrt{f'^2(v) + \alpha}, \quad z = u + v\sqrt{1 - \alpha};$$

où $f(u)$ est une fonction arbitraire, $f'(v)$ la dérivée de $f(v)$, et α une constante différente de 0. Le carré de l'élément linéaire d'une pareille surface, ayant une expression symétrique en u et v, à savoir :

$$ds^2 = (f'^2(u) + 1)\, du^2 + 2\sqrt{1 - \alpha}\, du\, dv + (f'^2(v) + 1)\, dv^2,$$

on voit tout de suite que la surface est applicable sur celle dont les équations se déduisaient des précédentes par l'échange des lettres u et v, laquelle est évidemment superposable à la première. D'autre part, l'équation qui fournit les rayons de courbure en un point quelconque est

$$\rho^2 + \frac{\sqrt{f'^2(u)\,f'^2(v) + f^2(u) + f'^2(v) + \alpha}}{\sqrt{1-\alpha}\,f'(u)\,f'(v)\,f''(u)\,f''(v)}$$

$$\frac{f''(u)(f'^2(v)+1)(f'^2(v)+\alpha)+\sqrt{1-\alpha}f'(u)f'(v)f''(v)(f'^2(u)+1)}{\sqrt{f'^2(v)+\alpha}}.\rho$$

$$+\frac{[f'^2(u)\,f'^2(v) + f'^2(u) + f'^2(v) + \alpha]^2}{\sqrt{1-\alpha}\,f'(u)\,f'(v)\,f''(u)\,f''(v)} = 0,$$

le coefficient de ρ ne pouvant être symétrique en u et v tant que α n'est pas nul, il est constaté par là que les rayons de courbure sont différents aux deux points qui correspondent à un système de valeurs échangées de u et v.

Parmi ces surfaces, qui sont toutes susceptibles d'être engendrées par une ligne plane de figure invariable, je signalerai en particulier celle qui a pour équation :

$$z = \tfrac{3}{2}\,(a^{\frac{1}{3}}\,x^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{2}}\,y^{\frac{1}{3}})\,;\ \text{où}\ a^2 - b^2 \gtrless 0$$

laquelle peut être engendrée par une développée de parabole s'appuyant sur une autre développée de parabole, et pour laquelle la correspondance entre deux points est donnée par les relations très-simples

$$x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}} = y_1^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$$
$$y^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = x_1^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}.$$

Séance du 27 novembre 1869.

PRÉSIDENCE DE M. MOUTARD.

M. Laguerre a fait une communication sur l'intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ;

M. Ribaucour, sur la déformation des surfaces;

M. Janssen, sur une méthode pour obtenir des monochromatiques des corps lumineux ;

M. Vaillant, sur l'effet d'une eau de pompe qui ne rougit pas le curaçao.

M. Delanoue présente quelques observations à ce sujet.

M. Bureau étudie la question suivante : jusqu'à quel point la connaissance des caractères fournis par la structure des tiges peut-elle servir à la classification; il s'occupe ensuite de la végétation des lianes.

Sur l'intégration d'une certaine classe d'équations différentielles simultanées du premier ordre, par M. Laguerre.

Dans une note *sur l'intégration d'une certaine classe d'équations différentielles du second ordre*, que j'ai présentée à l'Académie des sciences le 7 décembre 1868, j'ai donné une méthode qui permet d'intégrer au moyen des transcendantes abéliennes un grand nombre d'équations différentielles du second ordre. Toutes ces équations sont comprises dans le type général suivant

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{Z}},$$

équation où la caractéristique désigne une fraction quelconque de $\frac{dy}{dx}$ et où Z désigne un polynôme quelconque du second degré en x et en y.

Je consignerai à ce sujet une propriété importante des équations de la forme que je viens de considérer et qui peut s'énoncer ainsi :

« Si l'on connaît une solution particulière de l'équation (1) et qui ne soit pas de la forme $y = ax + b$, a et b étant des constantes de cette solution particulière, on peut, quelle

que soit la fonction f, déduire une intégrale du premier ordre renfermant une constante arbitraire. »

Dans la note citée, j'ai donné un cas particulier où l'intégration pouvait s'effectuer complétement; on peut trouver facilement une foule d'autres cas où l'on peut former l'intégrale complète avec deux constantes arbitraires.

Le but de la note que je présente aujourd'hui est d'indiquer un cas général où les équations différentielles peuvent s'intégrer algébriquement.

Soit

$$F(x, y, z) + \lambda (z - a)(z - \alpha) = 0$$

l'équation d'un système de surfaces du second degré renfermant un paramètre arbitraire λ, et

$$f(x, y, z) + \mu (z - a)(z - \alpha) = 0$$

l'équation d'un système de surfaces du second degré renfermant un paramètre arbitraire μ.

Désignons par S la courbe gauche résultant de l'intersection d'une quelconque des surfaces du premier système et d'une quelconque des surfaces du second système. Menons une tangente arbitraire à cette courbe et désignons par x, y, a les coordonnées de son point de rencontre avec le plan $z = a$, par ξ, η, α les coordonnées de son point de rencontre avec le plan $z = \alpha$; l'on aura les relations suivantes :

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{d\eta} = \frac{\sqrt{F(x, y, a)}}{\sqrt{F(\xi, \eta, \alpha)}} = \frac{\sqrt{f(x, y, a)}}{\sqrt{f(\xi, \eta, \alpha)}} ;$$

on peut, au lieu de ces relations, en désignant par $\frac{1}{t}$ la valeur commune des rapports précédents, écrire les deux systèmes d'équations qui suivent :

$$(2) \qquad \frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{d\eta} = \frac{1}{t}$$

$$(3) \qquad \frac{\sqrt{F(x, y, a)}}{\sqrt{F(\xi, \eta, \alpha)}} = \frac{\sqrt{f(x, y, a)}}{\sqrt{f(\xi, \eta, \alpha)}} = \frac{1}{t} .$$

Des équations (3), on peut déduire les valeurs de ξ et de η en fonction de x, y et t; en portant ces valeurs dans les équations (2), on obtiendra deux équations différentielles du premier ordre et du premier degré entre x, y et t; l'intégrale générale de ces équations pourra être obtenue facilement en vertu de ce qui précède. La courbe S étant choisie comme précédemment, l'on voit que x, y et t pourront être exprimées en fonction d'un seul paramètre arbitraire, dont l'élimination fournira les deux intégrales des équations proposées; de plus, comme les équations de S renferment deux paramètres arbitraires λ et μ, on obtiendra ainsi les intégrales qni seront évidemment algébriques.

Dans le cas général, l'élimination de t conduirait à une équation différentielle du second ordre entre x et y, que l'on intégrerait par la méthode précédente.

Dans un grand nombre de cas, une des intégrations peut s'effectuer immédiatement, et l'on est conduit alors à une équation différentielle du premier ordre entre deux variables et que l'on peut intégrer algébriquement.

Je ferai remarquer, en terminant, que les considérations précédentes sont au fond indépendantes des considérations géométriques que j'ai employées dans la note que j'ai présentée à l'Académie des sciences; elle repose uniquement sur des propriétés élémentaires des polynômes du second degré et s'étendent d'elles-mêmes à un nombre quelconque de variables.

Sur la déformation des surfaces, par M. Ribaucour.

Dans la dernière séance j'ai fait voir comment d'un groupe (A) (A') de surfaces applicables l'une sur l'autre, on pouvait déduire une infinité de groupes analogues.

Connaissant la surface (O) lieu des milieux des cordes A A', les équations qui déterminent les groupes correspondants peuvent se réduire à deux; elles sont linéaires et du premier ordre; on en conclut le théorème suivant :

« Soient deux groupes (A) (A′) et (A_1) (A'_1) symétriques » par rapport à la surface (O), si l'on divise les segments » AA_1 et $A'A'_1$ dans le même rapport constant, les surfaces » lieux de ces points de division sont aussi applicables l'une » sur l'autre. »

On peut supposer que (A_1) (A'_1) sont deux surfaces identiques à (O) transportée parallèlement à elle-même, et d'un groupe donné l'on déduit un autre avec quatre constantes arbitraires.

On peut aussi énoncer cette autre proposition : « Soient » deux groupes (A) (A′) et (A_1) (A'_1) symétriques par rap- » port aux plans tangents d'une surface (M), a et a_1 les pro- » jections de A et A_1 sur le plan tangent en M à (M), joi- » gnons les points a et a_1 aux points A_1 A'_1 et A A′, ces » quatre droites se coupent en deux points qui engendrent » deux surfaces applicables l'une sur l'autre. »

M. Moutard a fait voir que la recherche des groupes tels que je les ai étudiés revient à celle des groupes de surfaces se correspondant par orthogonalité des éléments. Les formules que j'ai déjà signalées à la Société me permettent d'établir plusieurs des résultats découverts par M. Moutard et m'ont conduit à considérer certains groupes dont je dirai quelques mots.

Soient deux surfaces (M) et (M′) se correspondant dans ce système et de telle façon que le point M′ soit à chaque instant dans le plan tangent en M à (M).

« Si l'on suppose le point M′ lié invariablement au plan » tangent qui le contient, la surface (M′) lieu de M′ corres- » pond toujours par orthogonalité des éléments à (M) quelle » que soit la forme de celle-ci. »

Les surfaces (M) sont particulières et d'un genre nouveau. Leur ds^2 peut s'écrire

$$ds^2 = e^{2u+V}(du^2 + dv^2).$$

V désignant une fonction arbitraire de v, le λ de ces surfaces est donné par une équation aux différentielles partielles du troisième ordre dont l'intégrale est :

$$F\left(\frac{\lambda^2 Y}{X'Y'}, \frac{\lambda^2 X}{X'Y'}\right) = 0$$

où la caractéristique est une fonction arbitraire, X et Y deux fonctions arbitraires des coordonnées symétriques imaginaires de la surface, et X′ Y′ leurs dérivées.

J'ai trouvé en termes finis l'équation des surfaces (M) dans le cas particulier où (M′) est un plan.

La connaissance de toutes les formes d'une de ces surfaces (M) donnerait, d'après la théorie de M. Moutard, un groupe de surfaces applicables avec deux fonctions arbitraires.

Séance du 11 décembre 1869.

PRÉSIDENCE DE M. MOUTARD.

M. le président communique une lettre de M. Arthur Gris, qui déclare donner sa démission de membre de la Société philomathique.

M. Laussedat fait un rapport sur la candidature de M. Gould au titre de membre correspondant.

M. Bert continue une communication relative à quelques points de la physiologie de la Sensitive.

M. Janssen fait connaître une méthode pour obtenir les images monochromatiques des corps lumineux. Il rend compte aussi de nouvelles recherches sur la vapeur d'eau, et fait une troisième communication sur la recherche du sodium par l'analyse spectrale.

Faits relatifs à l'influence de la lumière sur la Sensitive, par M. Paul Bert.

A. — Lorsqu'une Sensitive endormie est soumise pendant quelque temps à l'influence d'une lumière intense, elle com-

mence ses mouvements de réveil et étale ses folioles alors même que la lumière a été déjà enlevée.

B. — Si l'on maintient une Sensitive dans l'obscurité continue, les oscillations périodiques des pétioles primaires se troublent et diminuent, et ces pétioles finissent par devenir immobiles : ils sont alors abaissés. Peu avant ou peu après cette immobilité, ils deviennent insensibles. Si l'on emploie, au contraire, un éclairage continu, l'immobilité des pétioles arrive également, mais ils sont relevés presque au maximum. Leur sensibilité est alors extrême.

Ces formules sont le résultat d'observations faites en été, de 3 en 3 heures, pendant 17 jours et 17 nuits de suite.

C. — L'étude de l'influence des divers rayons lumineux a été faite au moyen de lanternes fabriquées avec des verres colorés, dont on a déterminé la valeur au spectroscope :

1° Verre noirci; 2° verre blanc; 3° verre rouge (sensiblement monochromatique) ; 4° verre jaune (laisse passer rouge, orangé, jaune, vert); 5° verre vert (laisse passer vert et un peu de bleu); 6° verre bleu (laisse tout passer, en affaiblissant beaucoup la région jaune) ; 7° verre violet (donne une bande d'absorption sur le jaune).

J'appellerai, par abréviation, rouge la Sensitive placée dans la lanterne rouge, etc...

a. — Si l'on coupe sur une Sensitive des feuilles d'âge égal, leurs folioles se ferment aussitôt pour se rouvrir à peu près en même temps. Mais si on les distribue dans chacune des lanternes colorées, on voit qu'elles se rouvrent après des intervalles de temps très-inégaux. Celle de la lanterne blanche se rouvre la première, celle de la lanterne noire la dernière. La Sensitive violette se rouvre presque en même temps que la blanche, la bleue ensuite; la verte et la rouge presque aussi tardivement que la noire. Il va sans dire que, dans ces expériences, la contre-épreuve a toujours été faite. Par exemple, des folioles de Sensitives, qui étaient restées deux heures dans le vert sans s'ouvrir, se sont rapidement ouvertes dans le violet, tandis que celles du violet, transposées avec elles, ne se sont plus rouvertes de la journée dans le vert.

Il est bon de faire remarquer que le plus obscur des

verres, au point de vue de l'intensité lumineuse, était le verre violet.

b. — Si l'on place une Sensitive dans une lanterne mi-partie rouge et mi-partie bleue, les folioles se tournent, en s'étalant, du côté du bleu.

c. — Quand des Sensitives entières sont placées dans des lanternes ci-dessus énumérées, elles présentent, dès le lendemain, des aspects très-différents. Les pétioles des Sensitives rouge, jaune, verte, sont plus dressés, et leurs folioles plus rapprochées que celles de la Sensitive blanche; le contraire a lieu pour les Sensitives bleue et violette, dont les pétioles s'abaissent et les folioles s'étalent.

Après un temps qui varie suivant la température, la saison, etc., la Sensitive noire devient insensible, puis meurt. La verte se comporte de même quelques jours après. Les autres paraissent vivre indéfiniment. Cependant, à l'exception de la blanche, elles ne grandissent guère.

Voici les détails d'une expérience encore en cours d'exécution.

Le 12 octobre, début de l'expérience; les plantes sont placées dans la serre de la Faculté de Médecine; il y en a cinq dans chaque lanterne; toutes sont de même taille et proviennent d'un même semis.

Le 19, noires presque insensibles; le 24, noires mortes, vertes insensibles; le 28, vertes mortes.

Je place dans la lanterne verte les Sensitives blanches, qui ont beaucoup grandi.

Le 5 novembre, les nouvelles vertes sont insensibles aux pétioles, encore un peu aux folioles; le 9, elles ne le sont presque plus; le 14, elles sont toutes mortes.

Aujourd'hui encore (14 décembre), toutes les autres sont sensibles, et paraissent se bien porter. Seulement, elles ont grandi très-inégalement : les rouges ont plus que doublé de longueur; les jaunes sont un peu moins élevées, mais leurs tiges sont extrêmement grêles; les rouges et les jaunes ont poussé de nouvelles feuilles. Les violettes sont beaucoup plus petites; les bleues ont à peine grandi et n'ont pas poussé de nouvelles feuilles.

Méthode pour obtenir les images monochromatiques des corps lumineux, par M. Janssen.

A la suite de l'éclipse du 18 août 1868, j'ai proposé une méthode pour obtenir les images monochromatiques des corps lumineux.

J'ai l'honneur de présenter, aujourd'hui, quelques détails sur cette méthode.

Imaginons qu'on fasse tomber l'image d'une flamme (pour prendre un exemple) sur la fente d'un spectroscope, le spectre formé résultera, dans le sens de sa hauteur, de la juxtaposition de tous les spectres linéaires fournis par les différents rayons lumineux qui pénétreront par les divers points de la fente.

Supposons maintenant qu'on place au point où le spectre se forme dans la lunette oculaire (tournée vers l'œil) une seconde fente parallèle à la première. Cette fente isolera dans le spectre une ligne lumineuse d'une couleur déterminée suivant le point du spectre où elle aura été placée. La hauteur de cette ligne et ses divers degrés d'intensité lumineuse seront en rapport avec celles de l'image de la flamme aux points où cette image est coupée par la fente du spectroscope. Si on imagine maintenant que le spectroscope tourne autour d'un axe passant par les deux fentes, alors les diverses parties de l'image lumineuse viendront successivement produire leur ligne monochromatique dans la lunette d'exploration, et si le mouvement rotatif est assez rapide, la succession de toutes ces lignes produira une impression totale qui sera l'image de la flamme formée avec des rayons d'une seule réfrangibilité. En déplaçant la fente, on pourra obtenir la série des images monochromatiques de cette flamme. Pour avoir plus d'égalité dans l'intensité des diverses parties d'une même image, on pourrait donner à la fente une ouverture plus grande vers les points les plus éloignés de l'axe de rotation.

Appliquée au Soleil, cette méthode pourrait fournir les images de l'ensemble des protubérances.

Pour la vision d'une protubérance isolée, la méthode de

M. Huggins, appliquée par M. Zoellner, peut avoir certains avantages. Mais la méthode décrite ici permettrait d'obtenir l'ensemble du phénomène, et d'ailleurs, c'est surtout comme méthode pour obtenir la série des images monochromatiques des corps lumineux que je la considère comme intéressante.

Sur le spectre de la vapeur d'eau, par M. Janssen.

Mes études sur le spectre de la vapeur d'eau ont été continuées.

Pour identifier les raies de la vapeur d'eau dans le spectre solaire, j'ai fait passer un faisceau de lumière solaire dans le tube de 37 mètres qui contenait la vapeur, et à côté du tube, un second faisceau. Ces deux faisceaux étaient reçus dans un même spectroscope, et leurs spectres étaient superposés. Toutes les raies du spectre dues à la vapeur d'eau étant beaucoup plus foncées dans le spectre correspondant à la lumière qui avait traversé le tube, on pouvait obtenir facilement la distinction.

Les raies du spectre solaire dues à la vapeur d'eau sont extrêmement nombreuses. De D à A (1) leur nombre est décuple des raies solaires proprement dites.

Dans la partie de la chaleur obscure, l'absorption de la vapeur d'eau est très-énergique aussi, ce qui confirme les résultats obtenus d'une autre manière par M. Tyndall.

Il en est de même pour la partie violette et ultra-violette du spectre. A Simla, dans les Himalayas, j'étais à 7000 pieds environ d'altitude, et pendant les mois de décembre et de janvier, j'avais une sécheresse extrême de l'atmosphère; or,

---

(1) Dans son beau mémoire sur le spectre normal du Soleil, M. Angström dit que j'attribue à la vapeur d'eau la raie A; ceci n'est pas exact. (Voir Compte-Rendu, 27 août 1866, p. 411, et 29 octobre p. 728.)

j'ai pu constater, dans ces conditions, que le spectre ultra-violet, photographié par M. Mascart, était directement visible (avec un spectroscope à vision directe du modèle de ceux que j'ai proposés en 1862 (1) et que M. Hoffmann a exécutés le premier). Ceci montre combien une atmosphère sèche est transparente pour la lumière ultra-violette, et explique comment les phénomènes photographiques sont si influencés par la présence de la vapeur d'eau dans l'atmosphère. On sait, par exemple, que, dans l'après-midi, la puissance photogénique diminue rapidement. Ceci s'explique d'après les observations ci-dessus, en remarquant que l'eau dissoute dans notre atmosphère augmente à mesure que le Soleil s'élève sur l'horizon. En général, abstraction faite des modifications apportées par les vents, la quantité de vapeur doit être la plus grande vers les 2 et 3 heures de l'après-midi, et alors, le Soleil baissant rapidement, les deux causes concourent pour amener une diminution très-prompte du pouvoir photographique de la lumière solaire. Le matin, avant que le Soleil n'ait eu le temps de vaporiser toute l'eau répandue à la surface de la Terre, la puissance photographique doit être la plus grande, et c'est en effet ce que l'expérience confirme.

Si l'atmosphère sèche est transparente, d'après ces observations pour la lumière violette et ultra-violette, elle l'est également pour la chaleur obscure. Ainsi, à Simla, j'ai pu reconnaître par des expériences pyrhéliométriques que le rayonnement calorifique du Soleil augmente beaucoup avec la sécheresse de l'atmosphère, toutes choses égales d'ailleurs sous le rapport de la pureté de l'air, de l'élévation de la station, etc.

J'ai pu constater aussi la présence de la vapeur d'eau dans une classe d'étoiles qui sont en général les étoiles rouges, et dans lesquelles manquent souvent les raies de l'hydrogène.

J'espère donner bientôt des cartes du spectre de la vapeur d'eau pour les régions obscure, lumineuse et ultra-violette.

---

(1) Compte-Rendu, 6 octobre 1862, p. 575.

Sur une nouvelle méthode pour la recherche de la soude et des composés du sodium par l'analyse spectrale, par M. Janssen.

On sait que la recherche de la soude présente en analyse spectrale des difficultés très-grandes qui tiennent à ce que la raie du sodium se retrouve dans presque toutes les flammes, en raison de la présence presque constante du sel marin dans l'atmosphère. Or, on peut lever facilement cette difficulté en employant, au lieu d'une flamme très-chaude et fort peu éclairante comme la flamme de Bunsen, une flamme très-lumineuse, comme celle d'un bec de gaz ordinaire dans la partie la plus brillante.

En effet, tandis qu'on aperçoit presque toujours la raie du sodium dans la partie bleue et transparente de la flamme d'un bec de gaz, on ne l'aperçoit plus dans la partie la plus lumineuse, à cause de l'abondance des rayons qui avoisinent la raie du sodium dans cette région.—Voici donc la manière d'opérer :

On dirigera le spectroscope sur la partie brillante de la flamme, de manière à obtenir un spectre brillant et continu, dans lequel la raie du sodium n'apparaisse pas sensiblement. On prendra un fil de platine qui aura été préalablement porté au rouge dans une flamme, pour le débarrasser de toute poussière salée, et, avec ce fil, on portera une goutte de la solution à essayer, dans la flamme du spectroscope. En cet instant, si la liqueur contient un composé de sodium réductible par la flamme, la raie D apparaîtra immédiatement.

On peut rendre aussi peu apparente qu'on le voudra la raie du sodium en employant les parties les plus brillantes des flammes, ou même en plaçant entre le spectroscope et la flamme d'essai une ou deux flammes auxiliaires qui rendront la raie D encore moins perceptible. Dans ce dernier cas, il faudra employer du sel en assez grande quantité dans la flamme d'essai pour voir apparaître la raie D dans le spectroscope. Si, au contraire, la liqueur ou le corps à essayer contient fort peu du composé sodé, on pourra em-

ployer une partie plus transparente de la flamme. Dans tous les cas, il sera prudent de faire des expériences comparatives avec les fils de platine et de l'eau distillée pour s'assurer que les raies qui apparaissent sont bien dues à la substance qu'on analyse.

Je continue l'étude de ce sujet, et j'espère arriver à une analyse *quantitative* des substances à étudier.

Séance du 18 décembre 1869.

PRÉSIDENCE DE M. TRANSON.

M. Prillieux rend compte d'expériences sur les mouvements des globules de chlorophylle dans les Mousses sous l'influence de la lumière.

M. Fischer fait une communication sur l'accouplement des Aplysies.

M. Bert demande que les comptes rendus des séances soient plus développés.

IMP. CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Ce, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 2814-0.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS.

Tome cinquième. — Janvier-Février-Mars 1868.

PARIS
LIBRAIRIE F. SAVY
24, RUE HAUTEFEUILLE.

1868

Le Bulletin de la SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE se publie par cahiers trimestriels depuis le mois de mars 1864. Le prix de l'abonnement est fixé à 5 francs.

ON S'ABONNE :

A la librairie F. SAVY, 24, rue Hautefeuille

TABLE DES MATIÈRES.

Séance du 4 janvier 1868 1
Sur une nouvelle turbine, par M. de Caligny 1
Séance du 11 janvier 1868 3
Sur la courbure des surfaces, par M. Gilbert 3
Séance du 18 janvier 1868 9
Sur le problème des remous, par M. de Saint-Venant 9
Sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques, par M. Laguerre 17
Séance du 25 janvier 1868 21
Sur la condition de l'élimination de l'erreur de lecture d'un cercle gradué provenant du jeu des tourillons dans les coussinets, par M. Wolf 22
Séance du 1er février 1868 24
Séance du 8 février 1868 24
Sur un principe de la théorie des surfaces, par M. l'abbé Aoust 24
Séance du 15 février 1868 29
Sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères, par M. Ribaucour 30
Séance du 22 février 1868 35
Sur un appareil à élever de l'eau au moyen d'une chute d'eau, par M. de Caligny 35
Sur le puits artésien de la place Hébert, à la Chapelle, par M. Laurent 37
Séance du 29 février 1868 39
Séance du 7 mars 1868 40
Séance du 14 mars 1868 40
Sur les cassiniennes planes et sphériques, par M. Laguerre 40
Séance du 21 mars 1868 47
Séance du 28 mars 1868 48
Sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiques, par M. Laguerre 48
Sur le déplacement d'une figure de forme invariable; nouvelle méthode de normales; applications diverses, par M. Mannheim. 52
Sur les inondations, par M. Dausse 61

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.—A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS.-4744-8

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS.

Tome cinquième. — Avril-Mai-Juin 1868.

PARIS

LIBRAIRIE F. SAVY

24, RUE HAUTEFEUILLE.

1868

Le Bulletin de la SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE se publie par cahiers trimestriels depuis le mois de mars 1864. Le prix de l'abonnement est fixé à 5 francs.

ON S'ABONNE :

A la librairie F. SAVY, 24, rue Hautefeuille.

TABLE DES MATIÈRES.

Séance du 4 avril 1868 64
Sur le tantochronisme des épicycloïdes, par M. Haton de la Goupillière 64
Séance du 18 avril 1868 65
Sur les courbes gauches résultant de l'intersection de deux surfaces du second ordre, par M. Laguerre 65
Sur des essais d'éclairage pour l'analyse des stries des Diatomées, par M. Frémineau 70
Séance du 25 avril 1868 72
Sur un nouveau mode de transformation des figures, par M. Darboux 72
Séance du 2 mai 1868 76
Séance du 9 mai 1868 76
Séance du 16 mai 1868 77
Sur la construction de la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points, par M. Darboux 77
Sur les épicycloïdes, par M. Fouret 80
Séance du 23 mai 1868 94
Séance du 30 mai 1868 94
Séance du 6 juin 1868 94
Séance du 13 juin 1868 95
Séance du 20 juin 1868 95
Séance du 27 juin 1868 95

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.—A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS.—14690-8

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS.

Tome cinquième. — Juillet-Août 1868.

PARIS

LIBRAIRIE F. SAVY

24, RUE HAUTEFEUILLE.

1868

Le Bulletin de la SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE se publie par cahiers trimestriels depuis le mois de mars 1864. Le prix de l'abonnement est fixé à 5 francs.

ON S'ABONNE :

A la librairie F. SAVY, 24, rue Hautefeuille

TABLE DES MATIÈRES.

Séance du 4 juillet 1868 97
Sur l'anatomie de l'Autruche d'Afrique, par M. Alix 97
Séance du 11 juillet 1868 99
Séance du 18 juillet 1868 99
Séance du 25 juillet 1868 100
Séance du 1er août 1868 100
Séance du 8 août 1868 100

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 11694-8

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS.

Tome cinquième. — Octobre-Novembre-Décembre 1868.

PARIS

LIBRAIRIE F. SAVY

24, RUE HAUTEFEUILLE.

1868

Le Bulletin de la SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE se publie par cahiers trimestriels depuis le mois de mars 1864. Le prix de l'abonnement est fixé à 5 francs.

ON S'ABONNE :

A la librairie F. SAVY, 24, rue Hautefeuille

TABLE DES MATIÈRES.

Séance du 17 octobre 1868 101
Séance du 24 octobre 1868 101
Séance du 31 octobre 1868 102
Séance du 7 novembre 1868 102
Sur la théorie des surfaces, par M. l'abbé Aoust 102
Séance du 14 novembre 1868 106
Sur un nouveau moyen de faciliter la marche automatique d'un nouveau système d'écluses de navigation, par M. A. de Caligny 106
Séance du 21 novembre 1868 108
Quelques remarques sur les lignes et sur les surfaces réciproques et caustiques, par M. E. Habich 108
Séance du 28 novembre 1868 112
Sur quelques propriétés générales des courbes algébriques et sur leur application à la théorie des courbes et des surfaces anallagmatiques, par M. Laguerre 112
Séance du 5 décembre 1868 120
Séance du 12 décembre 1868 121
Résultats d'expériences sur l'effet utile du nouveau système d'écluses de navigation, inventé par M. de Caligny et exécuté à l'écluse de l'Anbois, sur le canal latéral à la Loire, par M. Vallès 121
Séance du 19 décembre 1868 123
Séance du 26 décembre 1868 123
Table des matières du volume de l'année 1868 124

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.—A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS.— 2902-2

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS.

Tome sixième. — Janvier-Février-Mars 1869.

PARIS

LIBRAIRIE F. SAVY

24, RUE HAUTEFEUILLE.

1869

Le Bulletin de la SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE se publie par cahiers trimestriels depuis le mois de mars 1864. Le prix de l'abonnement est fixé à 5 francs.

ON S'ABONNE :

A la librairie F. SAVY, 24, rue Hautefeuille

TABLE DES MATIÈRES.

Séance du 9 janvier 1869..... 1
Sur les surfaces orthogonales, par M. Ribaucour..... 1
Séance du 16 janvier 1869..... 5
Séance du 23 janvier 1869..... 5
Séance du 13 février 1869..... 6
Sur les lois relatives à la courbure dans certaines transformations des courbes p'anes, par M. Abel Transon..... 6
Séance du 27 février 1869..... 8
Séance du 13 mars 1869..... 8
Sur l'effet utile de l'appareil de M. de Caligny appliqué aux écluses de navigation, par M. Vallès..... 9
Sur la spirique à centre, par M. de la Gournerie..... 11
Sur les longueurs d'arcs et le mouvement d'une figure dans son plan, par M. Ribaucour..... 12

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.—A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS.— 7450-2

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS.

Tome sixième. — Avril-Mai-Juin-Juillet-Août 1869.

PARIS

LIBRAIRIE F. SAVY

24, RUE HAUTEFEUILLE.

1869

Le Bulletin de la SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE se publie par cahiers trimestriels depuis le mois de mars 1864. Le prix de l'abonnement est fixé à 5 francs.

ON S'ABONNE :

A la librairie F. SAVY, 24, rue Hautefeuille

TABLE DES MATIÈRES.

Séance du 3 avril 1869..... 17
Séance du 10 avril 1869..... 17
Sur les transformations des figures planes, par M. Abel Transon. 18
Séance du 24 avril 1869..... 19
Séance du 8 mai 1869..... 19
Sur une monstrnosité d'un Tœnia de l'Homme, par M. Léon Vaillant..... 20
Sur l'emploi de condensateurs comme réservoirs d'électricité, par M. Guillemin..... 22
Séance du 12 juin 1869..... 24
Séance du 26 juin 1869..... 25
Recherches anatomiques sur les Limules, par M. Alph.-Milne-Edwards..... 25
Sur les surfaces orthogonales, par M. Ribaucour..... 26
Séance du 10 juillet 1869..... 29
Séance du 24 juillet 1869..... 30
Sur un appareil à faire des épuisements au moyen des vagues de la mer, par M. A. de Caligny..... 30
Séance du 14 août 1869..... 32

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.—A. CHAIX ET Cie, RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. 17004-9.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE

DE PARIS.

Tome sixième. — Octobre-Novembre-Décembre 1869.

PARIS

LIBRAIRIE F. SAVY

24, RUE HAUTEFEUILLE.

1869

Le Bulletin de la SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE se publie par cahiers trimestriels depuis le mois de mars 1864. Le prix de l'abonnement est fixé à 5 francs.

ON S'ABONNE :

A la librairie F. SAVY, 24, rue Hautefeuille

TABLE DES MATIÈRES.

Séance du 23 octobre 1869 33
Sur une application nouvelle de la force centrifuge, par M. A. de Caligny 33
Séance du 13 novembre 1869 36
Sur la théorie de l'application des surfaces l'une sur l'autre, par M. Ribaucour 37
Sur quelques propriétés des lignes spiriques, par M. Laguerre. 39
Sur une nouvelle application de la force centrifuge, par M. A. de Caligny 43
Sur la déformation des surfaces, par M. Moutard 45
Séance du 27 [illegible]mbre 1869 48
Sur l'intégra[illegible] [illegible]ne certaine classe d'équations différentielles simultanée[illegible] [illegible]premier ordre, par M. Laguerre 49
Sur la défo[illegible] des surfaces, par M. Ribaucour 51
Séance du [illegible]bre 1869 53
Faits relati[illegible] [illegible]uence de la lumière sur la Sensitive, par M. Paul [illegible] 53
Méthode pour [illegible] les images monochromatiques des corps lumineux, [illegible] Janssen 56
Sur le spectr[illegible] [illegible]apeur d'eau, par M. Janssen 57
Sur une no[illegible] [illegible]éthode pour la recherche de la soude et des compo[illegible] [illegible]dium par l'analyse spectrale, par M. Janssen 59
Séance du [illegible]bre 1869 60

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — A. CHAIX ET Cie RUE BERGÈRE, 20, A PARIS. — 2816-0

1630

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01526 6497